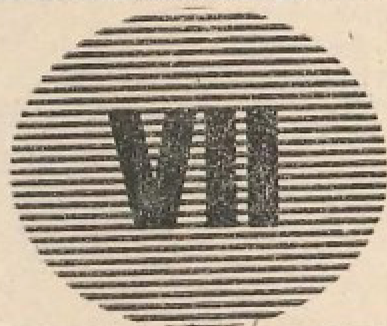
ION CUCULESCU
CONSTANTIN OTTESCU

GEOMETRIE

VII

Prof. univ. ION CUCULESCU Prof. CONSTANTIN OTTESCU



Matematică

Geometrie

Manual pentru clasa a VII-a



EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ
BUCUREŞTI

PREFAȚĂ

Scopul, formulat la modul cel mai general, al geometriei de clasa a VII-a este de a învăța pe elevi să „stăpînească planul" din punct de vedere calculatoric (cap. I) și, pe două exemple importante — aria și suprapunerea să-i familiarizeze cu modelarea matematică a unor noțiuni apărute pe cale intuitivă (cap. 2 și 3).

Prin „stăpînirea planului" înțelegem posibilitatea de a calcula lungimile segmentelor și măsurile unghiurilor ce apar în diferite construcții geometrice, cunoscînd pe cele ale elementelor geometrice inițiale. Aceasta permite realizarea de numeroase aplicații practice; în manual sînt prezentate cîteva. În acest mod se explică și originea numelui acestei discipline: măsurarea pămîntului.

Scopul capitolului I îl considerăm atins în paragraful „Rezolvarea triunghiurilor oarecare" în care se rezolvă cele trei probleme puse în manualul de clasa a VI-a la lecția despre construirea triunghiurilor.

Cele mai importante paragrafe din capitolul I sînt „Relații metrice în triunghiul dreptunghic" și „Sinusul și cosinusul unui unghi"; recomandăm să se insiste pe problemele din aceste paragrafe.

Am prezentat o demonstrație a teoremei lui Pitagora ce nu trece prin teorema catetei; considerăm însă tot atît de judicioasă demonstrarea ei cu ajutorul teoremei catetei, expusă și în carte.

Pentru ca elevii să nu rămînă cu impresia că geometria, în dezvoltarea ei, se subsumează unor scopuri calculatorii, am dat, cu caracter facultativ, materialul din paragraful „Cîteva teoreme în plus", însoțit de o listă de probleme. Aceleiași idei îi servesc și problemele de la „Puterea punctului".

Prin scopul urmărit, capitolul I are contingențe cu algebra. Una din ele este demonstrația teoremei lui Thales pentru rapoarte iraționale. Pe de altă parte, rezolvarea, problemelor cu date literale reclamă cunoștințe de calcul algebric, uneori o experiență ce poate depăși pe cea a elevilor din clasa a VII-a. De aceea ne-am mărginit, spre sfîrșitul capitolului 1, la probleme cu date numerice. Evident că se poate încerca rezolvarea unora din ele cu date literale...

Capitolul 2, despre arii, l-am prezentat puțin altfel decît de obicei Prin aceasta am evitat întîlnirea cu dificultăți dincolo de puterea de înțelegere a elevului mediu ca: „aria unui dreptunghi cu laturi iraționale" și „definiția ariei unui poligon oarecare". Fără a conține demonstrații deosebite, acest capitol este în întregime riguros astfel încît, de exemplu, demonstrația prin arii a teoremei lui Pitagora nu apare sub nici o formă drept sprijinită numai pe o intuiție.

Nu am încercat să facem riguros paragraful despre lungimea și aria cercului, din motive evidente.

În rezolvarea problemelor din capitolul despre arii intervin mereu cunoștințe din capitolul 1.

Problema distractivă (evident neobligatorie, ca și paragraful de astronomie din capitolul 1 etc.) are ca scop să arate elevilor că două poligoane cu aceeași arie se pot descompune în triunghiuri respectiv congruente.

Calculele laturilor și apotemelor pentagoanelor și decagoanelor sînt facultative; ele au drept scop numai lămurirea unor fapte expuse la orele de desen.

Din capitolul 3 sînt în primul rînd obligatorii paragrafele intitulate Translații și Rotații. În paragraful ce le precede „Despre transformări geometrice" se arată cum această noțiune modelează matematic pe cea de „suprapunere" care, deși nu a fost descrisă anterior în manualele de Geometrie, este familiară elevilor de la desen, geografie etc. (copierea unei figuri).

Evident că nu se pot urmări paragrafele despre translații și rotații dacă „se sare" materialul din capitolul 3 ce le precede. O bună parte din acest material este expus în stilul părții I din Geometria de clasa a VI-a, adică intuitiv.

Din lipsă de spațiu, nu am onorat promisiunea din clasa a VI-a de a prezenta cele mai interesante demonstrații din geometria axiomatică.

Considerăm că o bună parte din materialul acestei cărți, în special din capitolul 1, se pretează a fi predat prin rezolvare de probleme cu elevii, deoarece situațiile esențialmente noi (ce este o definiție corectă, necesitatea ca o definiție să fie precedată de o lemă, enunțuri ce conțin drept cazuri particulare mai multe enunțuri dinainte etc.) sînt mult mai rare.

PROBLEME RECAPITULATIVE DIN MATERIA CLASEI A 6-A

(Notăm cu asterisc pe cele pe care le considerăm mai dificile)

1. Dîndu-se dreptunghiul $ABCD$ ($AB > BC$) construim în interiorul său $\triangle EBC$ echilateral și în exteriorul său triunghiul echilateral GAB. Să se demonstreze că GE este congruentă cu diagonala dreptunghiului.

2. În triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 60°$, BB' și CC' sînt înălțimi (B' și C' sînt respectivi pe AC și AB). Fie H ortocentrul triunghiului (punctul de intersecție al înălțimilor). Demonstrați că:

a) Dacă T este simetricul lui H față de AC, $\triangle HTC$ este echilateral.

b) Dacă bisectoarea unghiului BHC taie cercul circumscris triunghiului ABC în I, și $IB \equiv IC$ atunci $\triangle BIH$ și $\triangle CIH$ sînt echilaterale.

3. Dacă $ABCD$ este un paralelogram și dacă înălțimea din A pe DC este congruentă cu cea dusă din A pe BC, paralelogramul este romb.

4. Într-un patrulater convex diagonalele sînt și bisectoare. Precizați natura lui! (Cu ce fel de patrulater avem de-a face).

5. Pe laturile AB, BC, CA ale unui triunghi luăm respectiv punctele C', A', B'. Demonstrați că perimetrul triunghiului $A'B'C'$ este mai mic decît al triunghiului ABC.

6. În triunghiul ABC, unghiurile B, C, au 70°, respectiv 50°. Fie BB', CC' înălțimi și BD bisectoare în triunghiul ABC. Să se determine unghiurile triunghiului determinat de dreptele BB', CC' BD.

7. În triunghiul AOB din figura 0.1, care este isoscel $(OA \equiv OB)$, segmentele $AC \equiv CD \equiv DB$. Să se demonstreze că unghiurile $\sphericalangle O_1$, $\sphericalangle O_2$, $\sphericalangle O_3$ nu pot fi toate congruente între ele.

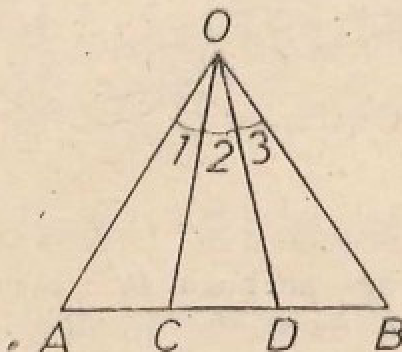


Fig. 0.1

8. Două cercuri de centre O și O' sînt tangente exterioare în punctul A Fie T, T' punctele în care o tangentă comună exterioară „atinge" respectiv cercurile. Linia centrelor OO' taie a doua oară cercurile în M și M'. Demonstrați că $TMM'T'$ este patrulater inscriptibil.

9. Cercurile de centre O respectiv O' și de diametre AA' și AA'' au comune punctele A și B (fig. 0.2) Să se demonstreze că:

a) A', B și A'' sînt coliniare.

b) Unghiurile triunghiurilor variabile AMN (unde M este pe cercul O și MB taie a doua oară cercul O' în N) au măsură constantă.

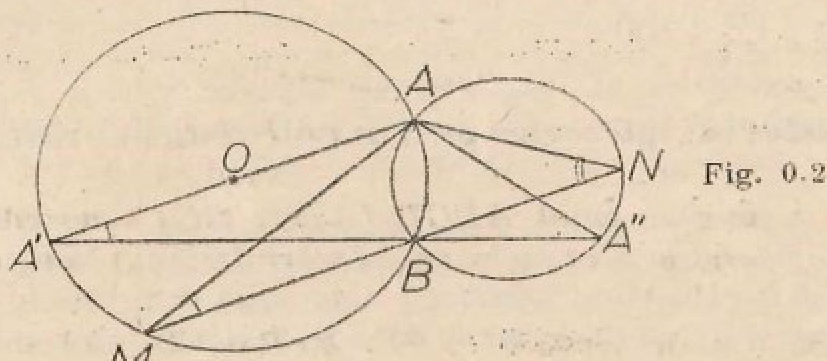


Fig. 0.2

10. Triunghiul ABC înscris în cercul de centru O are punctele B și C fixe și A descrie „arcul mare" BC. Să se arate că bisectoarea unghiului A trece printr-un punct fix. Are vreo importanță că A descrie „arcul mare" sau putem formula o problemă analogă privind „arcul mic"?

11*. Dîndu-se 4 puncte fixe, să se ducă prin fiecare din ele cîte o dreaptă astfel încît ele să formeze un pătrat.

12. În triunghiul ABC, I este centrul cercului înscris și dreapta AI intersectează cercul circumscris triunghiului ABC a doua oară în D. Demonstrați că $DI \equiv DB \equiv DC$.

13. Două cercuri secante de centre O și O' (fig. 0.3) se taie în A și B. Prin A și B ducem două drepte paralele care taie a doua oară cercurile respectiv în A' și A'', B' și B''. Demonstrați că $A'B'A''B''$ este paralelogram.

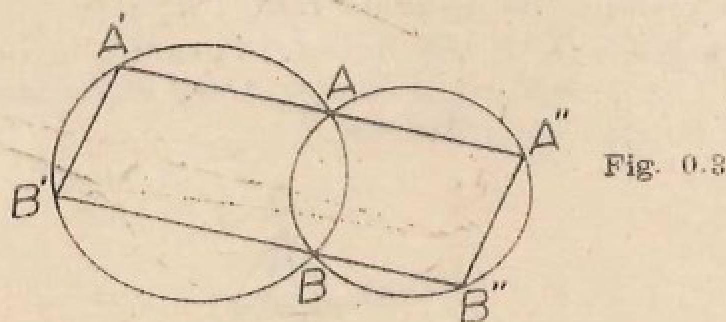


Fig. 0.3

14. Se dă triunghiul isoscel ABC ($AB \equiv AC$) și fie AH înălțimea sa din A și P un punct oarecare pe baza BC; perpendiculara din P pe bază întîlnește dreptele AB și AC respectiv în M și N. Se cere să se arate că:

a) triunghiul AMN este isoscel;

b) $AH = \frac{MP + NP}{2}$. Să se deducă de aici că suma $MP + NP$ este constantă cînd P circulă pe segmentul BC;

c*) care este locul geometric al mijlocului segmentului MN.

15. În triunghiul ABC, A_1 este piciorul înălțimii. Coborîți din A pe BC și A', B', C' mijloacele laturilor BC, AC, AB respectiv. Să se arate că $A'B'C'A_1$ este un trapez isoscel.

16. În triunghiul ABC, H este ortocentrul și A', B', C' mijloacele laturilor opuse respectiv vîrfurilor A, B și C. Dacă A_2 este mijlocul segmentului HA, să se demonstreze că:

a) $\sphericalangle A_2C'A' = 90°$;

b) patrulaterul $A'B'A_2C'$ este inscriptibil.

17*. *Cercul celor 9 puncte* (cercul lui Euler)

Folosind problemele 15 și 16 să se demonstreze că:

Într-un triunghi, picioarele înălțimilor, mijloacele laturilor și mijloacele segmentelor determinate de ortocentru în vîrfuri sînt conciclice (pe un același cerc).

18. Dacă într-un triunghi ABC, $\sphericalangle B = 60°$, $AB = 2BC$, demonstrați că triunghiul este dreptunghic.

19*. Pe latura AB a triunghiului echilateral ABC se ia E astfel încît $2BE = EA$. La fel pe latura AC se ia D astfel încît $DE = 2AD$. Demonstrați că $\sphericalangle AFC = 90°$ unde F este punctul de întîlnire a segmentelor BD cu EC.

20. Să se construiască un triunghi cunoscînd două laturi și înălțimea corespunzătoare laturii a treia.

21.** În figura 0.4 $ABCD$ este înscris în cercul dat, $AE \equiv AD$, $AE \parallel BC$, $CF \equiv CD$, $CF \parallel AB$. Demonstrați că $DF \perp DE$

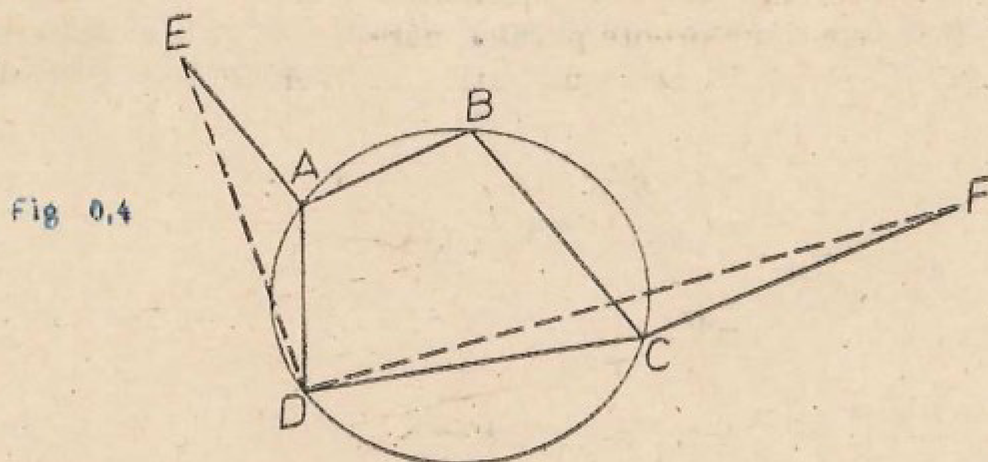


Fig 0,4

22. Construiți un triunghi ABC în care se cunosc latura BC, unghiul A și înălțimea BB'.

23*. Să se construiască triunghiul ABC în care se cunosc latura BC, mediana AM și unghiul A. Discuție.

24. **Pe laturile triunghiului ABC se construiesc: „în afară" 3 triunghiuri** echilaterale $A'BC$, $B'AC$, $C'AB$. Demonstrați că:

a) $BB' \equiv CC' \equiv AA'$;

b) cercurile circumscrise celor 3 triunghiuri echilaterale au un punct comun.

25*. Să se construiască triunghiul ABC în care se cunosc latura BC și medianele BB' și CC'.

26*. În triunghiul ABC se cunosc latura BC, înălțimile BB' și CC'. Să se construiască triunghiul.

27. Să se construiască un triunghi cunoscînd două laturi și mediana laturii a treia.

28*. Să se construiască un triunghi ABC cînd se cunosc înălțimea, bisectoarea și mediana care pornesc din A (luate ca segmente).

29*. Două cercuri (O) și (O') sînt tangente exterioare într-un punct A. Fie TT' una din tangentele comune exterioare și M, M' intersecțiile celor două cercuri cu o dreaptă variabilă ce trece prin A. Să se afle locul geometric al punctului P de intersecție a lui MT cu MT'.

30. Să se construiască un triunghi ABC în care se cunosc înălțimile BB', latura BC și O centrul cercului circumscris lui ABC.

31. Dîndu-se trei semidrepte OX, OY și OZ (OZ interioară unghiului XOY) fie M cu punct pe OZ. Să se ducă prin M o dreaptă care să intersecteze OX în A și OY în B, astfel încît M să fie mijlocul segmentului AB.

32. Pe cercul de centru O circumscris triunghiului echilateral ABC se ia pe arcul mic BC punctul variabil M. Bisectoarea unghiului BMC taie coarda BC în P. Din P ducem $PQ \perp MB$ și $PS \perp MC$. ($Q \in MB$, $S \in MC$).

a) Demonstrați că $\triangle MQS$ este echilateral;

b) Demonstrați că M, P, A sînt coliniare.

CAPITOLUL 1

RELAŢII METRICE

INTRODUCERE

În acest manual vom prezenta, ca şi în cel din clasa a 6-a, teoreme de geometrie plană. Stilul va fi acelaşi.

În acest capitol urmărim să demonstrăm teoreme pe baza cărora să putem calcula segmente şi unghiuri ce apar în diferite construcţii geometrice. Astfel ni se va deschide şi perspectiva, de exemplu, de a demonstra congruenţa a două segmente calculînd lungimile lor şi constatînd că sînt egale. Bineînţeles că, din cauza scopului descris mai sus, vor fi multe probleme în care concluzia va fi „incompletă", de tipul „$AB=...$" (în care în loc de punctele de suspensie urmează să punem, abia la sfîrşitul sau în cursul raţionamentului, expresia corespunzătoare).

TEOREMA LUI THALES

O paralelă la una din laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi segmente proporţionale.

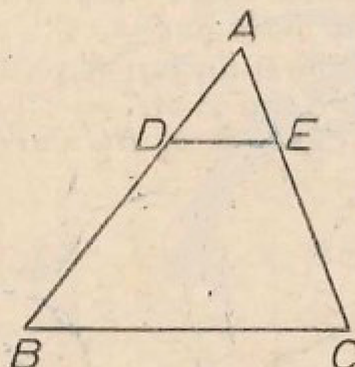


Fig. 1.1

Ipoteză:

$DE \parallel BC$

Concluzie:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$$

Demonstraţia o vom face deocamdată, în acest paragraf, numai în cazul cînd unul din cele două rapoarte este un număr raţional.

Să presupunem, de exemplu, că $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{7}$. Să împărțim segmentul AB în 7 părți congruente prin punctele $D_1, D_2, \ldots, D_6$. Vom avea deci $AD_1 \equiv \equiv D_1D_2 \equiv \ldots \equiv D_5D_6 \equiv D_6B$. Să ducem prin punctele $D_1, \ldots, D_6$ paralele la BC; ele vor tăia latura AC respectiv în $E_1, \ldots, E_6$. Deci, în figura I.2, vom avea $D_1E_1 \parallel D_2E_2 \parallel \ldots \parallel D_6E_6 \parallel BC$.

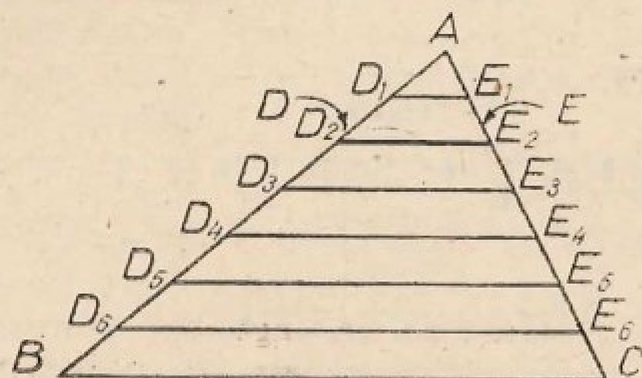


Fig. I.2

Aplicînd teorema asupra liniei mijlocii în triunghiul AD_2E_2, precum și în trapezele $D_1E_1E_3D_3$, $D_2E_2E_4D_4, \ldots$, $D_4E_4E_6D_6$, D_5E_5CB, obținem $AE_1 \equiv \equiv E_1E_2 \equiv \ldots \equiv E_5E_6 \equiv E_6C$.

Să observăm acum că $\frac{AD_2}{AB} = \frac{2}{7} = \frac{AD}{AB}$; deci $AD_2 \equiv AD$, adică $D = D_2$. Deducem acum că $E = E_2$ și, în sfîrșit, este vizibil că $\frac{AE}{AC} = \frac{2}{7}$.

Observația 1. La fel se dovedește că, în notațiile fig. I,2. avem $\frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}$. Împărțind relația din concluzia teoremei cu cea scrisă aici, obținem și $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. Deci, oricum am scrie concluzia teoremei lui Thales (determină segmente proporționale), obținem un enunț adevărat.

Observație. 2. Lungimea unui segment depinde de unitatea de măsură aleasă pentru segmente, în schimb cîtul lungimilor a două segmente nu depinde. Acest cît se numește, după cum s-a învățat la Aritmetică, și „raportul lungimilor celor două segmente". Este unul din primele locuri în care noțiunea de raport, „spune ceva" în Matematică.

Problemă rezolvată 1. Fie D un punct pe latura AB a unui triunghi ABC în care $AB = 5$ cm, $BC = 8$ cm și $AC = 10$ cm (fig. I.3). Se știe că $AD = = 2$ cm. Prin D ducem o paralelă la BC care taie AC în E. Să se calculeze lungimile segmentelor AE, EC.

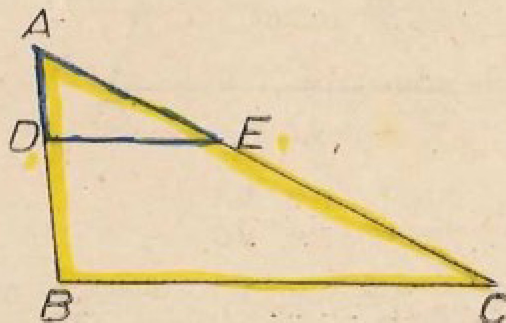


Fig. I.3

Ipoteza:

$AB = 5$, $BC = 8$, $AC = 10$, $AD = 2$

$DE \parallel BC$

Concluzia:

$AE = \dots$, $EC = \dots$

*Rezolvare**. Triunghiul despre care este vorba există deoarece $8 - 5 < 10 < 8 + 5$. Teorema lui Thales dă $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, deci $\frac{2}{5} = \frac{AE}{10}$, de unde obținem $AE = 4$ și apoi $EC = AC - AE = 6$. Deci concluzia completă este: $AE = 4$, $EC = 6$.

Observație. Dacă scriam teorema lui Thales sub forma $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, atunci, notînd $AE = x$, deci $EC = 10 - x$, obținem $\frac{2}{3} = \frac{x}{10 - x}$ și, rezolvînd ecuația $x = 4$ etc.

Problemă rezolvată 2. Pe laturile unui unghi cu vîrful în O se dau punctele A, B respectiv C, D (fig. I.4). Să se precizeze poziția punctului M de intersecție a dreptelor AC și BD calculînd raportul $\frac{MA}{MC}$.

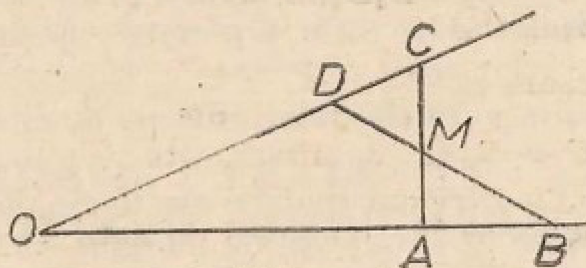


Fig. I.4

Rezolvare. Pentru a putea aplica teorema lui Thales, să ducem prin A paralela la BD și să notăm cu X punctul în care ea intersectează pe OC ($AX \parallel BD$) (fig. I.5).

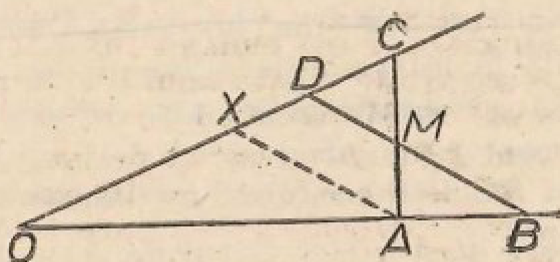


Fig. I.5

Teorema lui Thales în $\triangle CXA$, „tăiat" de DM, dă $\frac{MA}{MC} = \frac{DX}{DC}$. Lungimea segmentului DX este încă necunoscută, dar teorema lui Thales în $\triangle OBD$ tăiat de AX dă $\frac{DX}{DO} = \frac{BA}{BO}$. Acum este ușor de obținut concluzia dorită (ipoteza fiind formată din figura I.4): $\frac{MA}{MC} = \frac{DO}{DC} \cdot \frac{BA}{BO}$.

* Aceasta este tot o demonstrație, dar nu „demonstrăm" ci „rezolvăm" o problemă.

1. Probleme

1. În interiorul unui segment AB de lungime 55 cm se consideră un punct C astfel ca $\frac{AC}{CB} = \frac{5}{6}$. Să se determine lungimile segmentelor AC și CB.

2. Aceeași problemă ca la 1, cu singura deosebire că se presupune C situat pe dreapta AB dar nu în interiorul segmentului AB.

Unde rezultă C: de aceeași parte a lui A ca și B sau de cealaltă parte?

3. Se dau trei puncte coliniare A, B, C, astfel încît C este situat între A și B. Să se exprime fiecare din rapoartele $x = \frac{CA}{CB}$, $y = \frac{CA}{AB}$ și $z = \frac{CB}{AB}$ în funcție de fiecare din celelalte două.

4. Dacă A, B, C, D sînt coliniare, dacă C și D sînt situate între A și B și dacă $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$, să se demonstreze că $C = D$.

5. Aceeași problemă ca la 4, însă presupunînd că nici C nici D nu este situat între A și B (cele 4 puncte continuînd a fi presupuse coliniare).

6. Trei drepte paralele determină pe două secante segmente proporționale.

7. Enunțați cazuri particulare ale teoremei lui Thales; și ale teoremei din problema 6 (amintiți-vă teoreme sau chiar exerciții de anul trecut!)

8. Care este reciproca teoremei lui Thales? Este ea adevărată?

9. Fie M și N puncte pe laturile AB, AC ale unui triunghi astfel ca $MN \parallel BC$. Dacă $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{11}$, să se calculeze $\frac{AN}{NC}$.

10. Demonstrați teorema lui Thales în cazul în care punctele D și E nu se află în interioarele segmentelor AB, AC; deosebiți cazul în care ele se află pe semidreptele AB, AC și cazul în care ele se află pe prelungirile acestor semidrepte.

11. Scrieți o demonstrație a teoremei lui Thales, considerînd $\frac{AD}{AB} = \frac{m}{n}$ în care m și n sînt naturale, $1 \leq m < n$ (deci fără a particulariza pe m și n).

12. Fiind date trei segmente u, v, w, să se construiască un segment x astfel ca $x = \frac{uv}{w}$. Caz particular $u = 6$ cm, $v = 10$ cm, $w = 15$ cm.

13. (Întrebare). Puteți folosi teorema lui Thales pentru a construi un segment $x = \sqrt{uv}$, u și v fiind segmente date?

14. Se consideră trei drepte Ox, Oy, Oz, punctele A, A_1 pe Ox și punctele B pe Oy și C pe Oz. Paralela prin A_1 la AB taie Oy în B_1, iar paralela la BC prin B_1 taie Oz în C_1. Să se demonstreze că $C_1A_1 \parallel CA$.

15. Se consideră un punct D pe latura BC a triunghiului ABC. Paralela prin D la AB taie AC în E, paralela la BC prin E taie AB în F etc. Să se arate că după un anumit număr de astfel de construcții „ne întoarcem" în D. Care este acel număr?

16. Cum trebuie ales D din problema 15, pentru ca întoarcerea în D să aibă loc după un număr mai mic de construcții decît în cazul general? Care este acel nou număr?

17. Fie D punctul în care bisectoarea unghiului A al unui triunghi intersectează latura opusă BC. Să se demonstreze că $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Aceeași problemă pentru „bisectoarea exterioară"... .

18. Scrieți rezolvarea problemei rezolvate 2 în cazul în care C este între O și D. Ce constatați cu privire la rezultat?

19. Pe dreapta Ox se consideră punctele A, B, C, iar pe dreapta Oy punctele A', B', C'. Dacă $AB' \parallel BA'$ și $BC' \parallel CB'$, să se demonstreze că $AC' \parallel CA'$.

20. Dați un exemplu de proporție în care un termen să fie număr întreg, iar toți ceilalți trei să fie numere iraționale.

TEOREMA LUI THALES ÎN CAZUL RAPOARTELOR REALE OARECARE

Înainte de a demonstra teorema în acest caz, să amintim cîteva fapte relativ la numerele reale.

a) Fiind date două numere reale a și b, este adevărată una și numai una din relațiile $a < b$, $a = b$, $b < a$.

Cu alte cuvinte, $<$ este o relație de ordine totală pe mulțimea numerelor reale.

b) Fiind date două numere reale a și b, așa încît $a < b$, există un număr rațional r astfel ca $a < r < b$ (evident, r nu este unic, deoarece, conform aceleiași proprietăți, va exista și un număr rațional s cu proprietatea $a < s < r$, deci $s < b$ etc.).

Exemplificăm această proprietate astfel. Dacă $a = 2{,}738...$ și $b = 3{,}069...$ putem lua $r = 2{,}9$; dacă $a = 2{,}839997...$ și $b = 2{,}8400002...$ putem lua $r = 2{,}839998$.

c) Dacă avem două numere reale a și b așa încît, *pentru r rațional*, este adevărat că $(r < a) \longleftrightarrow (r < b)$ atunci $a = b$.

Aceasta este o consecință a proprietăților a), b). Într-adevăr, dacă, de exemplu, am avea $a < b$, atunci alegem un r rațional cu proprietatea $a < r < b$ și avem $r < b$ adevărat dar $r < a$ fals, deci $\longleftarrow$ ar fi neadevărată, contrar ipotezei.

Putem trece acum la *demonstrația teoremei lui Thales în cazul general* (bazîndu-se pe valabilitatea acestei teoreme în cazul cînd unul din rapoartele ce apar este rațional).

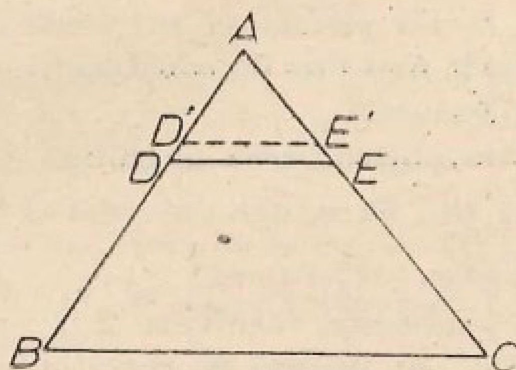


Fig. I.6

Fie r un număr rațional astfel ca $r < \frac{AD}{AB}$, deci $r \cdot AB < AD$. Să construim un punct D' situat în interiorul segmentului AD, (fig. I.6), astfel încît $AD' = r \cdot AB$. Paralela prin D' la BC va tăia AC într-un punct E' situat în interiorul segmentului AE. Conform teoremei lui Thales pentru raport rațional, vom avea $\frac{AE'}{AC} = r$, deci $r < \frac{AE}{AC}$.

Am arătat astfel că, pentru r rațional avem $\left(r < \frac{AD}{AB}\right) \rightarrow \left(r < \frac{AE}{AC}\right)$.

La fel se arată că pentru r rațional avem $\left(r < \frac{AE}{AC}\right) \rightarrow \left(r < \frac{AD}{AB}\right)$.

Pe baza proprietății c) de mai sus, teorema lui Thales este complet demonstrată.

Observație. Vom vedea în cele ce urmează că, efectuînd construcții geometrice asupra unor segmente cu lungimi raționale (chiar întregi), obținem foarte ușor segmente de lungimi iraționale. De exemplu, lungimea diagonalei unui pătrat de latură 1 este un număr irațional. De aceea este important să știm că teorema lui Thales este adevărată în cazul cînd rapoartele ce apar în ea sînt numere reale oarecare.

TEOREMA FUNDAMENTALĂ A ASEMĂNĂRII*

T e o r e m a . O paralelă la una din laturile unui triunghi formează cu celelalte laturi un alt triunghi care are toate unghiurile respectiv congruente și toate laturile respectiv proporționale cu ale celui inițial.

Deci în triunghiul ABC ducem PQ paralelă cu $BC (P \in AB)$, $(Q \in AC)$, notațiile fiind cele dinfigura I.7.

* Această formulare își va găsi semnificația mai tîrziu.

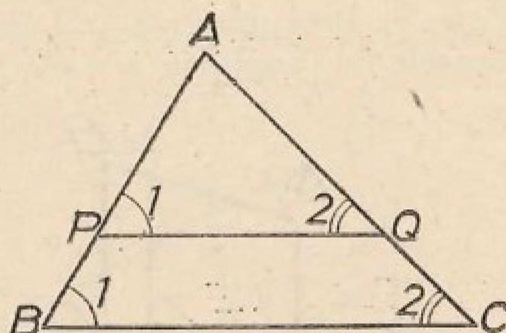


Fig. I.7

Ipoteza
$PQ \parallel BC$

Concluzia
1) $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A$, 2) $\sphericalangle P_1 \equiv \sphericalangle B_1$, 3) $\sphericalangle Q_2 \equiv \sphericalangle C_2$,
4) $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$

Demonstrație

Relația 1) este evidentă. Congruențele 2), 3), se referă la unghiuri corespondente. Prima proporție din 4), rezultă direct din teorema lui Thales. Rămîne de demonstrat că $\frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$. Pentru aceasta ducem $QT \parallel AB(T \in BC)$, (fig. I.8). Se formează astfel pe de o parte paralelogramul $PQTB$ și deci

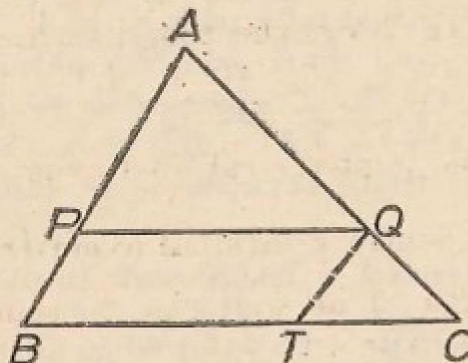


Fig. I.8

$PQ \equiv BT$, pe de altă parte se poate aplica teorema lui Thales ($QT \parallel AB$) și se obține: $\frac{AQ}{AC} = \frac{BT}{BC}$. În ultima proporție înlocuind pe BT cu PQ, obținem și ultima relație căutată.

Observație. Putem să considerăm că paralela PQ întîlnește prelungirile laturilor triunghiului ABC; demonstrația rămîne în esență aceeași.

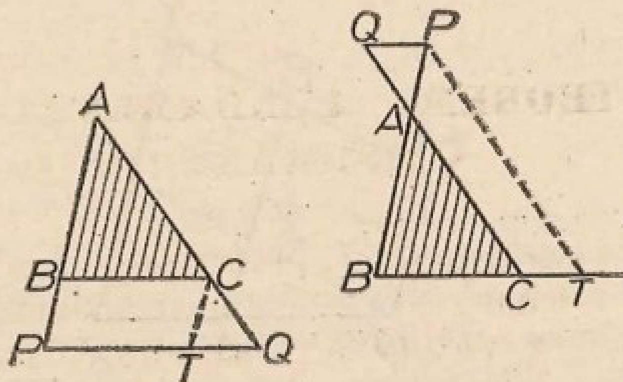


Fig. I.9

Problemă rezolvată. Se consideră un trapez $OABM$, de baze $OM = b$ și $AB = c$, în care $OA = a$. Se alege un punct X pe dreapta OA; paralela prin

X la baze taie MB în Y. Presupunînd $c > b$, să se exprime lungimea y a segmentului XY în funcție de lungimea x a segmentului OX.

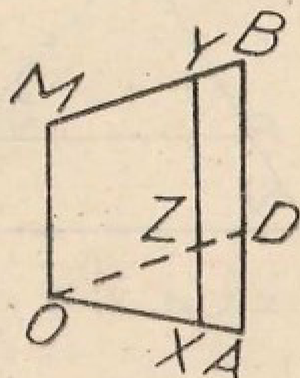


Fig. I.10

Ipoteza

$OM \| XY \| AB$

$OA = a$, $OM = b$, $AB = c$

$OX = x$, $XY = y$.

Rezolvare. Va trebui să deosebim mai multe cazuri, după poziția lui X pe dreapta OA.

Cazul 1 (fig. I.10): X se află între O și A.

În toate cazurile vom duce prin O o paralelă la BM și vom nota cu D intersecția sa cu AB iar cu Z intersecția sa cu XY. Din paralelogramele $OMYZ$, $OMBD$ deducem că $YZ = BD = b$. Cum $b < c$, rezultă că punctul D, care va fi același în toate cazurile ce le vom deosebi, este situat între A și B, iar $AD = c - b$.

Teorema fundamentală a asemănării în ΔOAD tăiat de XZ dă $\frac{x}{a} = \frac{XZ}{c - b}$. Această concluzie este valabilă în toate cazurile, dacă ținem seamă de observația de după teorema fundamentală a asemănării.

În cazul 1, Z va fi între X și Y, deci $\frac{x}{a} = \frac{y - b}{c - b}$; în acest caz rezultatul este $y = b + \frac{c - b}{a} x$.

Cazul 2: A se află între O și X

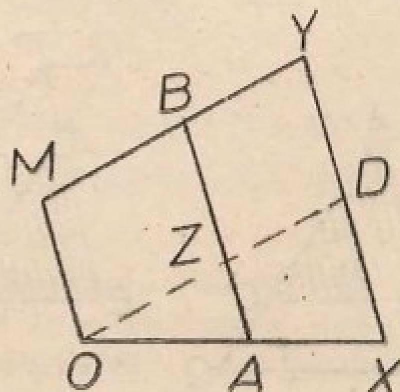


Fig. I.11

corespunde tot situației „Z între X și Y", deci raționamentul și rezultatul sînt aceleași ca și în cazul 1.

Cazul 3: X se află între O și intersecția C a dreptelor OA, MB.

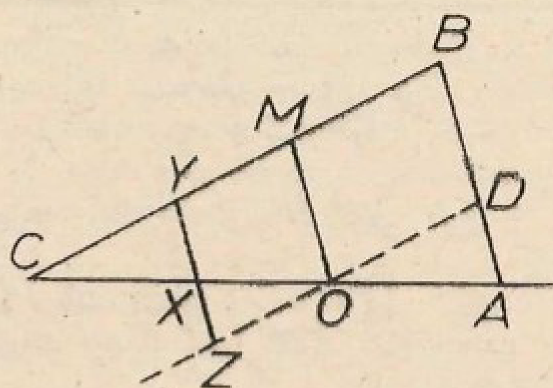


Fig. I.12

În acest caz X se află între Y și Z, deci $XZ = b - y$ și obținem $\frac{x}{a} = \frac{b-y}{c-b}$, iar rezultatul este $y = b - \frac{c-b}{a}x$.

Alegînd $X = C$ obținem $\frac{OC}{a} = \frac{b}{c-b}$, deci $OC = \frac{ab}{c-b}$, ceea ce ne permite să descriem cazul 3 și astfel: O între A și X, $x < \frac{ab}{c-b}$.

Cazul 4: O între A și X, $x > \frac{ab}{c-b}$ (cu alte cuvinte C între O și X).

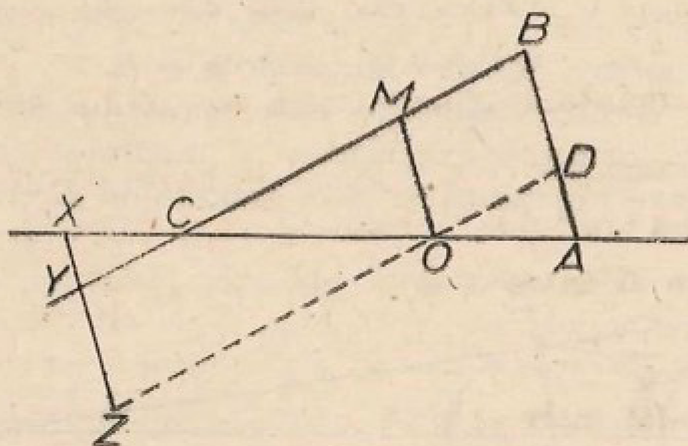


Fig. I.13

În acest caz Y se află între X și Z, deci $XZ = y + b$, $\frac{x}{a} = \frac{y+b}{c-b}$, iar rezultatul este $y = \frac{c-b}{a}x - b$.

Observație. Dacă am conveni să considerăm pe x „cu semnul +" cînd X este „la dreapta" lui O și cu semnul − cînd X este la stînga lui O, pe y cu semnul + cînd Y se află în semiplanul „de deasupra" lui OA și cu semnul − cînd Y se află în cel de dedesubt, atunci rezultatul din cazul 1 ar fi valabil în toate celelalte cazuri.

Această observație ne arată că se apropie momentul cînd vom învăța să considerăm și „lungimi negative".

1. Prin punctul P de intersecție a diagonalelor unui trapez, se duce o paralelă la baze. Ea intersectează laturile neparalele în M și N. Demonstrați că P este mijlocul segmentului MN.

2. Să se demonstreze că dacă paralela MN la bazele AD și BC ale unui trapez ($M \in AB$, $N \in DC$) taie diagonalele BD în T și AC în S, atunci $MT \equiv SN$.

3. Într-un triunghi ABC orice segment $PQ \parallel BC$ ($P \in AB$, $Q \in AC$) este împărțit de mediana AM (M fiind mijlocul segmentului BC) în două segmente congruente.

4. Să se construiască o paralelă la bazele unui trapez oarecare care să fie împărțită de diagonale în trei părți congruente.

5. În figura alăturată $AD = a$ și $BC = b$ sînt două segmente paralele. DB și AC se taie în P. Segmentul PQ este paralel cu AD.

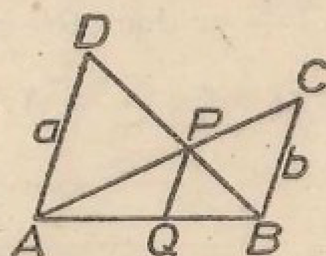


Fig. I.14

Să se exprime PQ în funcţie de a şi b.

6. Două cercuri tangente exterioare au razele R şi r (fig. I. 15). Tangenta lor comună exterioră TT' întîlnește linia centrelor OO' în S. Să se calculeze segmentul $O'S$ în funcție de R și r.

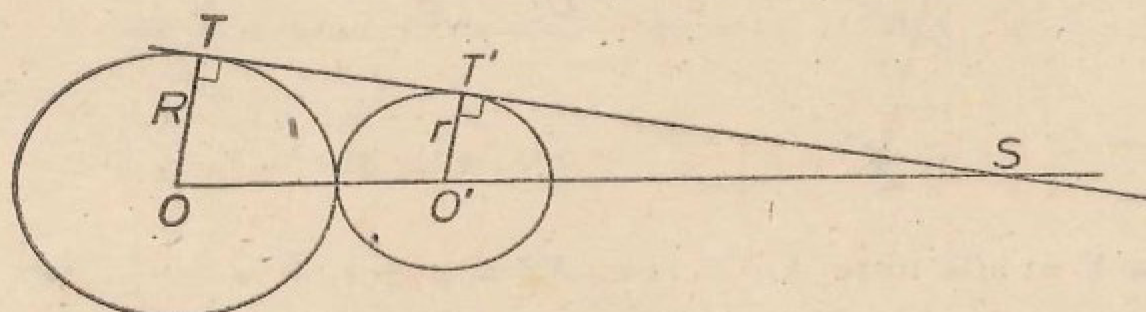


Fig. I.15

7. Un triunghi ABC are laturile $AB = 9$ cm, $BC = 15$ cm și $AC = 18$ cm. Se ia pe latura AB un punct D astfel ca $AD = 6$ cm; paralela prin D la BC taie AC în E. Să se calculeze lungimile laturilor triunghiului ADE.

8. Laturile neparalele BC, AD ale unui trapez $ABCD$ se intersectează în M. Să se calculeze lungimile segmentelor MA, MB, MC, MD în funcţie de laturile trapezului (se va presupune că baza mare este AB. Aplicaţii numerice: a) $AB = 20$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 15$ cm; $DA = 8$ cm, b) $AB = 20$ cm, $BC = 3$ cm, $CD = 15$ cm, $DA = 9$ cm;

9. Diagonalele unui trapez $ABCD$ de baze AB, CD se intersectează în N. Să se calculeze, în funcție de lungimile bazelor și diagonalelor trapezului, lungimile segmentelor NA, NB, NC, ND. Aplicații numerice: $AB = 20$ cm, $CD = 10$ cm, $AC = 21$ cm, $BD = 12$ cm, b) $AB = 20$ cm, $CD = 10$ cm, $AC = 15$ cm, $BD = 9$ cm.

Observație. Cu cunoștințele de pînă acum, nu putem calcula lungimile diagonalelor unui trapez, cunoscînd laturile sale. Vom ajunge să rezolvăm o astfel de problemă la pag. 53. Din acest motiv nu putem unifica problemele 8, 9 într-una singură.

10. Se consideră o dreaptă d și pe ea punctele A_0, A_1, A_2, ... așa încît $A_0A_1 = A_1A_2 = ... = 1$ cm. Se duc perpendicularele a_0, a_1, a_2,... pe d punctele A_0, A_1, A_2,...

a. Se consideră punctele B_1 și C_1 pe a_1 și punctele B_2, C_2 pe a_2, toate în același semiplan determinat de d, astfel ca $A_1B_1 = 2$ cm, $A_1C_1 = 7$ cm, $A_2B_2 = 6$ cm, $A_2C_2 = 3$ cm. Să se precizeze poziția punctului M de intersecție al dreptelor B_1B_2, C_1C_2, calculînd A_0N și NM, unde N este piciorul perpendicularei din M pe d.

b. Aceeași problemă pentru punctul de intersecție al dreptelor D_1D_2, D_4D_5, în care D_1 este situat pe a_1, D_2 pe a_2, D_4 pe a_4, D_5 pe a_5, toate în același semiplan determinat de d, iar $A_1D_1 = 1$ cm, $A_2D_2 = 5$ cm, $A_4D_4 = 10$ cm, $A_5D_5 = 3$ cm.

11. Tangenta comună exterioară a două cercuri exterioare întîlnește linia centrelor OO' în M. Să se calculeze lungimile segmentelor MO, MO' în funcție de razele R, r ale cercurilor și de distanța $d = OO'$ între centrele lor.

12. Aceeași problemă ca la 11 dar pentru tangenta comună interioară.

13. Aceeași problemă ca la 11 dar pentru cercuri secante.

14. Se consideră un cerc fix de centru O și un punct fix A. Se ia un punct M pe acel cerc și se consideră un punct N pe semidreapta AM, astfel ca $\frac{AN}{AM} = k$. Care este locul geometric al lui N cînd M parcurge cercul dat, k rămînînd și el fix.

15. Aceeași problemă ca la 14, însă alegînd N pe dreapta AM astfel ca A să fie între M și N.

16. Se consideră două cercuri neconcentrice, de raze neegale.

a) Găsiți un punct A și un număr k astfel încît locul geometric din problema 14, relativ la unul din cercuri, la A și la k, să fie tocmai celălalt cerc.

b) Aceeași problemă în ceea ce privește locul geometric din problema 15.

c) Ce se întîmplă dacă razele cercurilor ar fi egale?

d) În cazurile în care cercurile ar fi exterioare, tangente exterioare, precizați poziția punctelor de la a și b, iar în cazurile în care cercurile ar fi secante, tangente interioare, precizați poziția punctului de la a).

17. Se consideră un patrulater convex $ABCD$ şi un punct M interior segmentului AC. Paralela prin M la AB taie BC în N, iar paralela prin M la CD taie AD în P. Să se demonstreze că $\frac{MN}{AB} + \frac{MP}{CD} = 1$.

18. În paralelogramul $ABCD$ unim A cu mijlocul lui BC şi B cu mijlocul lui CD; cele două drepte se taie în X. Care este valoarea raportului $\frac{XA}{XM}$, unde M este mijlocul lui BC?

19. Locul geometric al punctelor din interiorul unui unghi nealungit, pentru care raportul distanţelor la laturile unghiului este egal cu un număr dat, este o semidreaptă cu originea în vîrful unghiului.

Aplicaţie. Problema 11 ne permite să analizăm ceva mai de aproape fenomenul eclipselor de Soare. Ştiţi desigur că o eclipsă de Soare are loc în situaţia în care Pămîntul, Soarele şi Luna sînt coliniare, iar Luna se află între Pămînt şi Soare (fig. I.16).



Fig. I.16

Aceste corpuri cereşti nu sînt puncte, aşa încît pentru a înţelege mai bine fenomenul este preferabil să privim figura I.17 (unde Pămîntul n-a fost încă figurat).

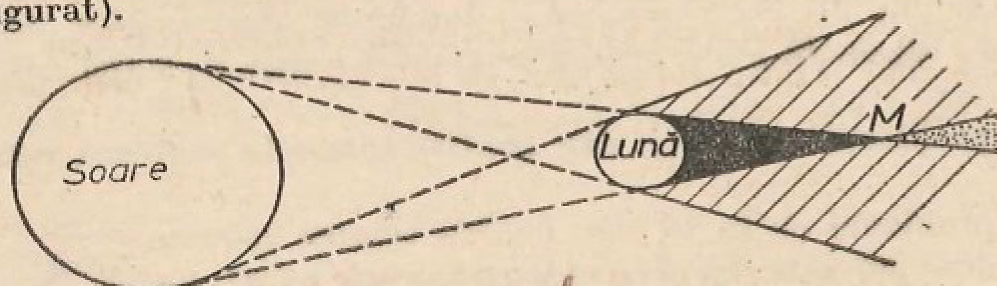


Fig. I.17

Eclipsa de Soare are loc pentru orice observator plasat în una din cele trei zone, însă ceea ce vede el pe cer diferă de la zonă la zonă:

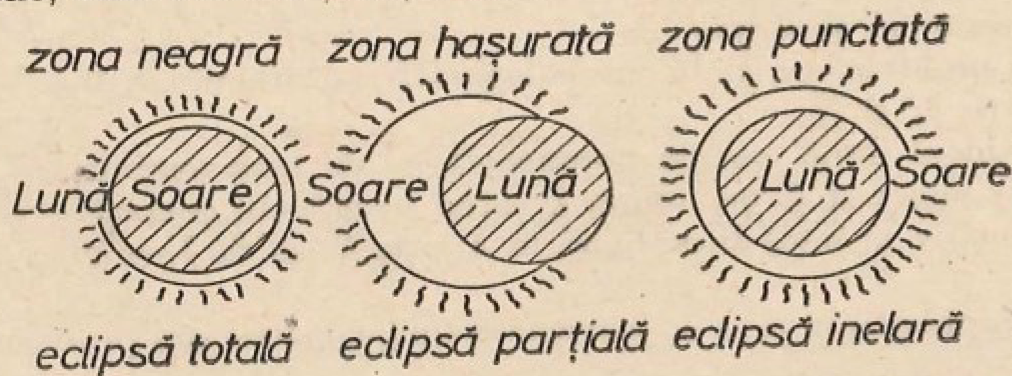


Fig. I.18

Întrebarea care se pune este: de pe Pămînt vedem eclipsa totală sau inelară? Adică: este distanţa de la Lună la punctul M din figura I.17 mai mare sau mai mică decît distanţa de la Lună la Pămînt?

Rezolvarea problemei 11 de la **pagina 19** ne permite să calculăm distanța de la Lună la punctul M prin formula $\frac{dr}{R-r}$, unde R este raza Soarelui, r este raza Lunii, iar d este distanța între Soare și Lună în situația corespunzătoare eclipsei, deci diferența dintre distanța de la Soare la Pămînt și distanța de la Pămînt la Lună.

Datele numerice astronomice sînt raza Soarelui = 695 300 km, raza Lunii = 1 738 km, distanța Pămînt-Soare = 149 450 000 km, distanța Pămînt-Lună = 384 000 km. Efectuînd calculele conform formulei de mai sus, obținem pentru distanța de la Lună la punctul P o valoare de aproximativ 373 000 km.

Valoarea obținută este foarte apropiată de distanța Pămînt-Lună; nu trebuie deci să ne grăbim cu concluzia, deoarece datele numerice de mai sus sînt „medii": Pămîntul se mișcă în jurul Soarelui, și Luna în jurul Pămîntului nu pe cercuri, ci pe „elipse" și distanțele de mai sus variază. Calculele de mai sus sînt cel mai mult influențate de variațiile distanței Lună-Pămînt, distanță ce poate lua valori între 356 000 și 407 000 km.

Concluzia este deci: de pe Pămînt se pot observa și eclipse totale și eclipse inelare de Soare. Cum punctul M este totdeauna aproape de Pămînt cînd are loc o astfel de eclipsă, rezultă că zona de pe Pămînt din care putem observa, la un moment dat o eclipsă de Soare totală sau inelară este foarte mică în comparație cu întreg Pămîntul. Într-un punct dat de pe pămînt, eclipsele de Soare totale sau inelare se pot oberva în *medie* o dată la 400 ani. Ultima astfel de eclipsă vizibilă de pe teritoriul țării noastre (de fapt — numai din sudul țării) a fost eclipsa totală din 15 februarie 1961: următoarea, de asemenea totală, va avea loc în 11 august 1999.

TRIUNGHIURI ASEMENEA. CAZURILE DE ASEMĂNARE

Faptul pus în evidență în teorema fundamentală a asemănării ne conduce la următoarea:

Definiție: Fie A, B, C **trei puncte necoliniare și** A', B', C' **alte trei puncte necoliniare. Spunem că** $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C$ **(și citim aceasta: triunghiul** ABC **este asemenea cu triunhiul** $A'B'C'$**) dacă** $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B \equiv B'$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$ și $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$*.

Cu alte cuvinte, două triunghiuri se numesc asemenea dacă au unghiurile respectiv congruente și laturile respective **proporționale**.

---

* Valoarea comună a acestor rapoarte se numește **„raportul de asemănare"** al triunghiurilor.

Care sînt exemplele de triunghiuri asemenea? Să observăm întîi că două triunghiuri congruente sînt asemenea; dar nu pentru a considera astfel de exemple am introdus definiția. Teorema fundamentală a asemănării ne arată un mod de a construi un triunghi asemenea cu un triunghi dat, dar necongruent cu acesta.

Observație. La noțiunea de asemănare a triunghiurilor se ajunge și pe cale intuitivă, considerînd două desene, al doilea (fig. I.20) fiind obținut „mărind" pe primul (fig. I.19).



Fig. I.19



Fig. I.20

Ele „seamănă", dar nu pot fi făcute să coincidă prin suprapunere. Un segment din primul desen nu este congruent cu segmentul corespunzător din al doilea, însă raportul lungimilor lor este același pentru toate segmentele ce le putem considera în modul de mai sus în cele două desene. Unghiul a două direcții din primul desen este congruent cu unghiul corespunzător din cel de-al doilea (aceasta și dă senzația de asemănare). Considerînd cea mai simplă figură-triunghiul-ajungem la definiția de mai sus.

La fel putem să gîndim privind două hărți ale aceleiași regiuni făcute la scări diferite.

Există trei teoreme ce se numesc cazuri de asemănare ale triunghiurilor, ale căror enunțuri sînt analoage cu cele trei cazuri de congruență. Înainte de a le enunța și demonstra, să observăm că dacă $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ și $\triangle A'B'C' \equiv \triangle A''B''C''$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$, cu alte cuvinte un triunghi asemenea cu un triunghi dat este asemenea cu orice triunghi congruent cu triunghiul dat.

Cazul 1 de asemănare. *Două triunghiuri ce au un unghi congruent și laturile ce-l formează proporționale sînt asemenea* (fig. I.21).

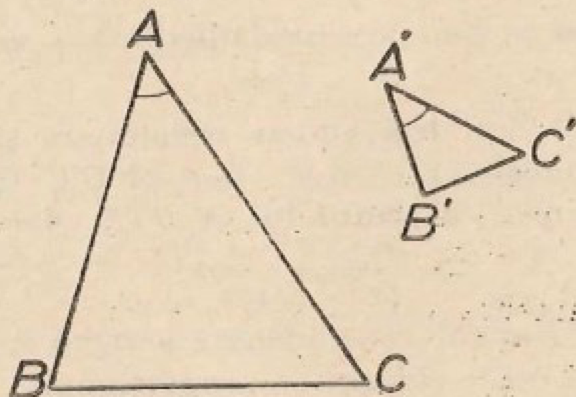


Fig. I.21

Ipoteza

$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A', \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}$

Concluzia

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Cazul 2 de asemănare. *Două triunghiuri ce au două unghiuri respectiv congruente sînt asemenea* (fig. I.22).

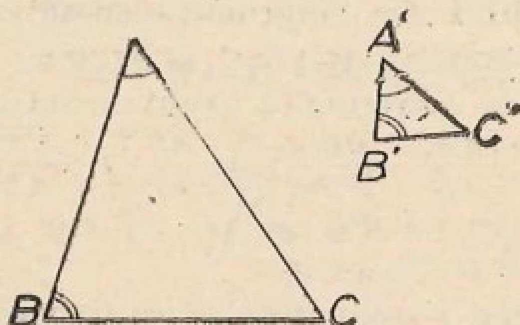


Fig. I.22

Ipoteza

$\sphericalangle A \equiv A'$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$

Concluzia

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Cazul 3 de asemănare. *Două triunghiuri ce au cele trei laturi proporționale sînt asemenea* (fig. I.23).

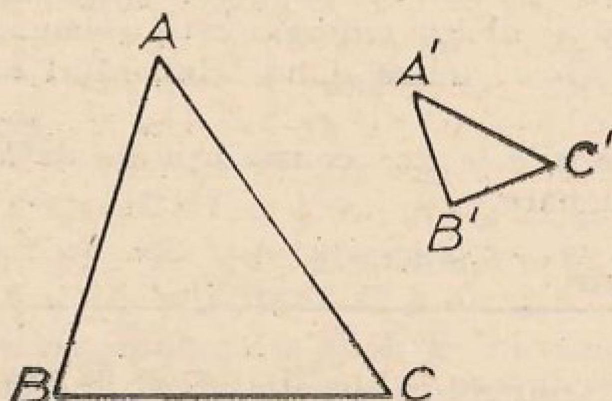


Fig. I.23

Ipoteza

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$

Concluzia

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Demonstrațiile celor trei teoreme au o parte comună. Anume.

Considerăm pe semidreapta AB un punct B_1 astfel ca $AB_1 \equiv A'B'$, ducem prin B_1 paralela la BC şi notăm cu C_1 intersecția ei cu AC (fig. I.24).

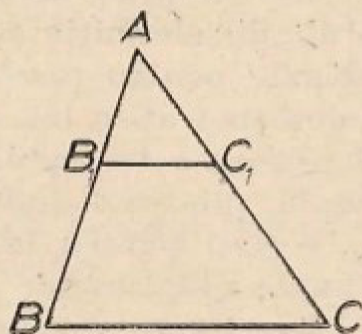


Fig. I.24

Conform teoremei fundamentale a asemănării avem $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$. Deci $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle AB_1C_1$, $\frac{AB_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AC_1}{AC}$.

Rămîne de demonstrat că $\triangle AB_1C_1 \equiv \triangle A'B'C'$ (şi observația dinaintea enunțurilor va încheia demonstrația). Aceasta se va face în mod diferit pentru fiecare din cele trei teoreme, folosind cazul de congruență corespunzător.

Cazul 1. Din $\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}$, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$ și $A'B' \equiv AB_1$ deducem $AC_1 \equiv A'C'$ și cazul 1 de congruență arată că $\triangle AB_1C_1 \equiv \triangle A'B'C'$.

Cazul 2. Din $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle AB_1C_1$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$ deducem că $\sphericalangle AB_1C_1 \equiv \equiv \sphericalangle B'$ și cazul 2 de congruență arată acum că $\triangle AB_1C_1 \equiv \triangle A'B'C'$.

Cazul 3. Din $\frac{AB_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AC_1}{AC}$, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$ și $AB_1 \equiv \equiv A'B'$ deducem $B_1C_1 \equiv B'C'$ și $AC_1 \equiv A'C'$ și cazul 3 de congruență arată că $\triangle AB_1C_1 \equiv \triangle A'B'C'$, q.e.d.

Credem că după parcurgerea acestui paragraf este clar de ce teorema de la pag. 14 a fost numită „teorema fundamentală a asemănării".

Observație. Relația de asemănare între două triunghiuri are următoarele proprietăți:

a. *Este reflexivă;* adică orice triunghi este asemenea cu el însuși.

b. *Este simetrică;* adică dacă un triunghi este asemenea cu un al doilea triunghi, atunci și al doilea triunghi este asemenea cu primul.

c. *Este tranzitivă;* adică două triunghiuri asemenea cu al treilea sînt asemenea.

Proprietățile *a*, *b*, *c* sînt consecințe ale definiției, sau, mai simplu, ale cazului 2 de asemănare.

3. Probleme

1. Demonstrați că două triunghiuri echilaterale sînt asemenea.

2. Două triunghiuri dreptunghice isoscele sînt asemenea.

3. Dacă $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ și dacă D și D' sînt intersecțiile lui BC respectiv $B'C'$ cu bisectoarele unghiurilor din A respectiv A' atunci $\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$.

4. Aceeași problemă ca la 3 pentru mediane în loc de bisectoare.

5. Aceeași problemă pentru înălțimi.

6. Raportul razelor cercurilor înscrise în două triunghiuri asemenea este egal cu raportul „din definiția asemănării".

7. Aceeași problemă pentru razele cercurilor circumscrise.

8. Enunțați și demonstrați o teoremă ce ar trebui să poarte numele de „cazul 2 de asemănare a triunghiurilor dreptunghice".

9. Într-un triunghi, produsul dintre o latură a sa și înălțimea corespunzătoare ei este același pentru toate cele trei laturi.

10. Într-un triunghi dreptunghic ABC se duce înălțimea AD corespunzătoare ipotenuzei. Să se demonstreze că $AB^2 = BD \cdot BC$ și că $AD^2 = BD \cdot DC$.

11. Se consideră un segment AB și un punct M în interiorul său. Se construiesc, de aceeași parte a dreptei AB, pătratele $AMNP$ și $BMDC$. Să se demonstreze că $\frac{PC}{NB}$ este același, oricare ar fi poziția lui M în interiorul segmentului AB.

12. Să se construiască un pătrat care să aibă două vîrfuri alăturate pe latura BC a unui triunghi, iar celelalte două vîrfuri pe cîte una din celelalte două laturi ale triunghiului.

13. În figura I.25 $ABCD$ și $AMNP$ sînt pătrate, E este mijlocul lui BC și Q este mijlocul lui MN.

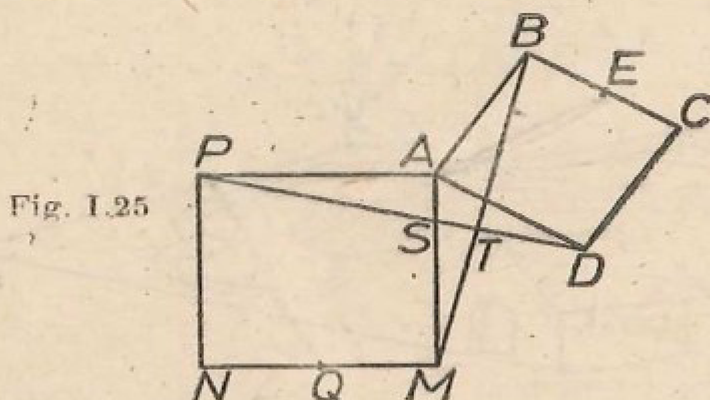


Fig. I.25

a. Arătați că $PD \equiv MB$.

b. Arătați că $\frac{AE}{PQ} = \frac{AB}{AM}$.

c. Arătați că $\triangle MST \sim \triangle PSA$.

14. În figura I.26 ABC și CDE sînt triunghiuri echilaterale.

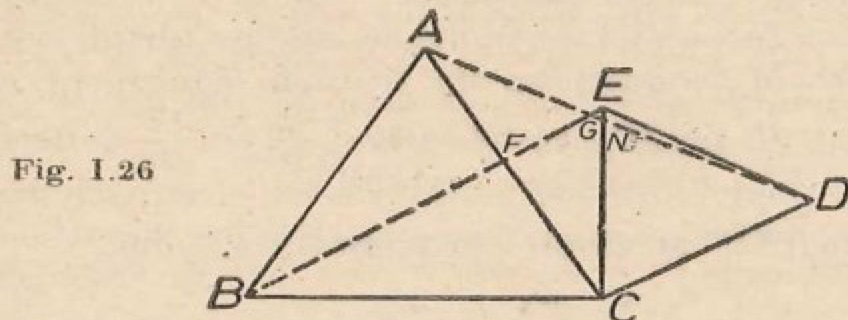


Fig. I.26

Să se demonstreze că:

a. $BE \equiv AD$.

b. $\triangle AGF \sim \triangle BCF$

c. $\triangle EGN \sim \triangle DCN$.

15. Din mijlocul D al laturii BC a unui triunghi ABC ducem perpendiculare pe AB, AC; fie P respectiv Q picioarele acestor perpendiculare. Să se demonstreze că $\frac{DP}{DQ} = \frac{AC}{AB}$.

16. Triunghiurile ABC și MNP au $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M = 90°$, $\sphericalangle B = 37°$, $\sphericalangle P = 53°$. Să se demonstreze că sînt asemenea.

17. Se știe că $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $AB = 9$ cm, $BC = 5$ cm, $AC = 10$ cm, $DE = 99$ cm. Să se calculeze EF și DF.

Aplicație practică. Determinați, prin măsurători, distanța dintre casa și pomul din figura 1.27.

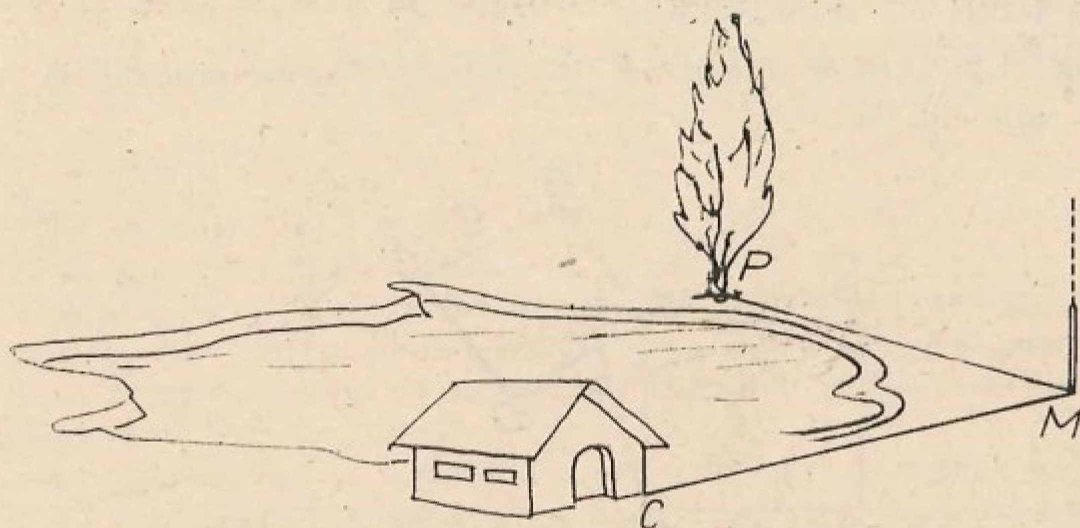


Fig. 1.27

Ar fi greu s-o măsurăm direct, din cauza lacului. Procedăm astfel. Alegem un punct M (și-l marcăm, de exemplu, cu un țăruș). Măsurăm distanțele CM și MP și găsim, de exemplu, $CM = 250$ m, $MP = 150$ m. Măsurăm și unghiul CMP și găsim, de exemplu, $\sphericalangle CMP = 60°$.

Desenăm apoi pe hîrtie un triunghi $C'M'P'$ asemenea cu $\triangle CMP$ astfel: Luăm un unghi $xM'y$ de 60°, alegem un punct C' pe $M'x$ oarecare, de exemplu astfel încît $M'C' = 5$ cm (un astfel de punct încape pe hîrtie, ceea ce nu s-ar fi întîmplat dacă încercam să desenăm un triunghi congruent cu $\triangle CMP$) și apoi alegem un punct P' pe $M'y$ astfel încît $\frac{M'P'}{MP} = \frac{M'C'}{MC}$, deci $\frac{M'P'}{150} = \frac{5}{250}$ adică $M'P' = 3$ cm.

Măsurăm distanța $C'P'$ și găsim aproximativ 4,4 cm.

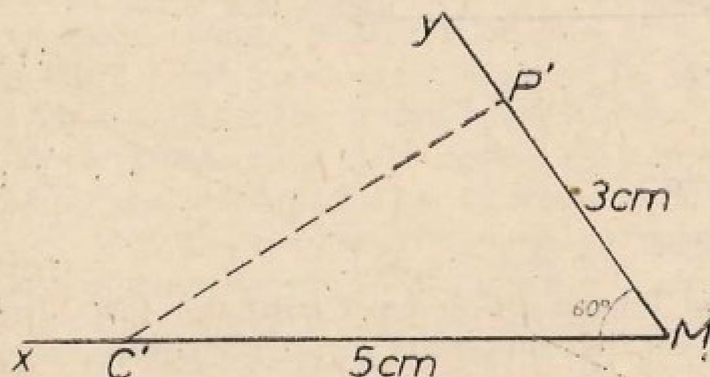


Fig. 1.28

Triunghiul $C'M'P'$ este asemenea cu triunghiul CMP, conform cazului 1 de asemănare. Rezultă că $\frac{CP}{C'P'} = \frac{MC}{M'C'}$, deci $\frac{CP}{4,4} = \frac{250}{5}$, de unde deducem că distanța CP dintre casă și pom este de aproximativ 220 m.

Observație. Vom învăța mai tîrziu să *calculăm* CP, cunoscînd MC, MP și $\sphericalangle CMP$.

4. Exerciții

1. Determinați prin măsurători distanța de la *A* la *B*, unde *B* este inaccesibil (fig. I.29).

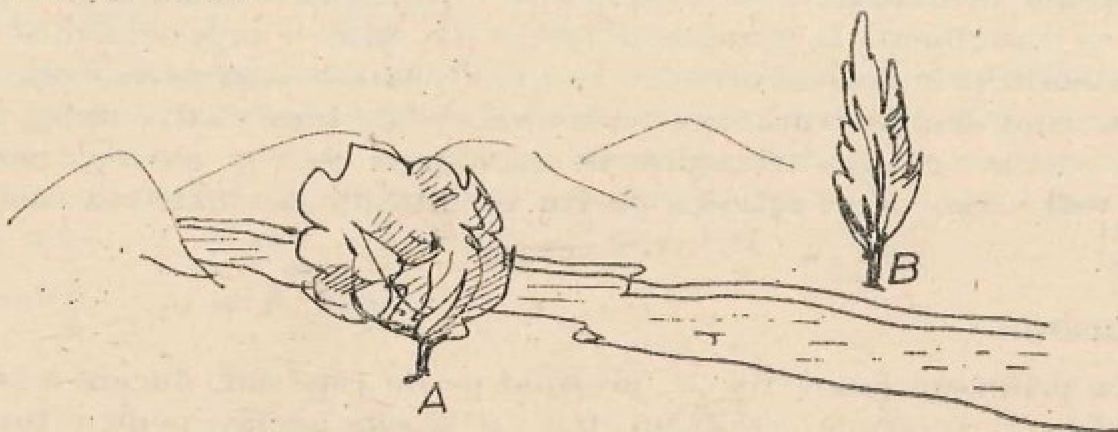


Fig. I.29

2. Determinați prin măsurători distanța între punctele *A* și *B*, fără a „vizita" insulele (fig. I.30).

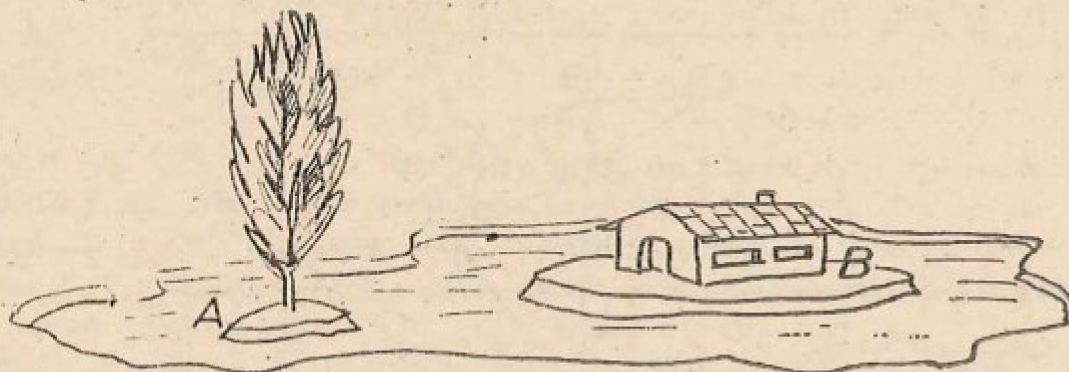


Fig. I.30

3. Explicați cum determină elevul din figura I.31 înălțimea copacului și cum trebuie el să-și construiască, din punct de vedere geometric, instalația.

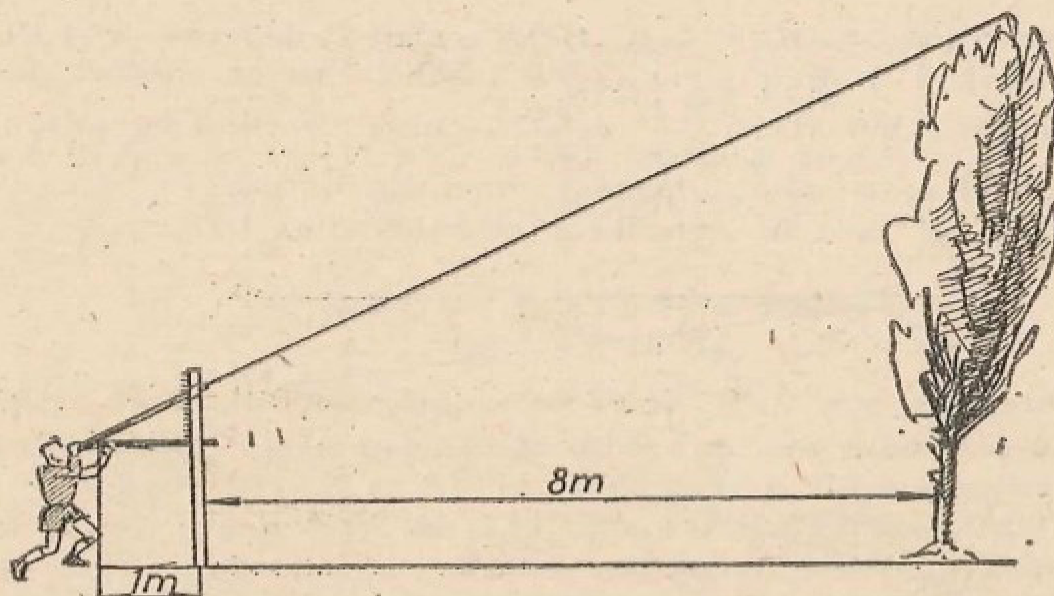


Fig. I.31

PUTEREA UNUI PUNCT FAȚĂ DE UN CERC

Teorema următoare este o aplicație a asemănării triunghiurilor. Ea ar fi apărut ca o problemă la paragraful respectiv, dacă n-ar fi prezentat o importanță deosebită prin consecințele ei, ce vor fi enunțate în paragraful următor.

Urmărind demonstrația acestei teoreme, este bine să fiți atenți la „corespondența vîrfurilor" din triunghiurile asemenea ce vor apărea, pentru a fi siguri că veți scrie corect relațiile ce vor rezulta din asemănarea acelor triunghiuri.

Teoremă

Dacă printr-un punct fix M, nesituat pe un cerc dat, ducem o secantă ce taie cercul în A, B, atunci produsul $MA \cdot MB$ este același pentru toate secantele ce trec prin M.

În demonstrație vom deosebi două cazuri.

Cazul 1. M este în interiorul cercului (fig. 1.32).

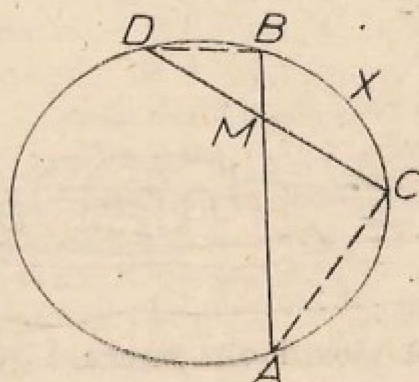


Fig. 1.32

Concluzia

$MA \cdot MB = MC \cdot MD$

Demonstrație. $\triangle MAC \sim \triangle MDB$ (cazul 2) deoarece $\sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle DMB$ (opuse la vîrf) și $\sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle MDB$ (ambele au ca măsură jumătate din măsura arcului CXB). Deci $\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB}$ de unde, scriind că produsul mezilor este egal cu al extremilor, obținem concluzia dorită.

Cazul 2. M este în exteriorul cercului (fig. 1.33).

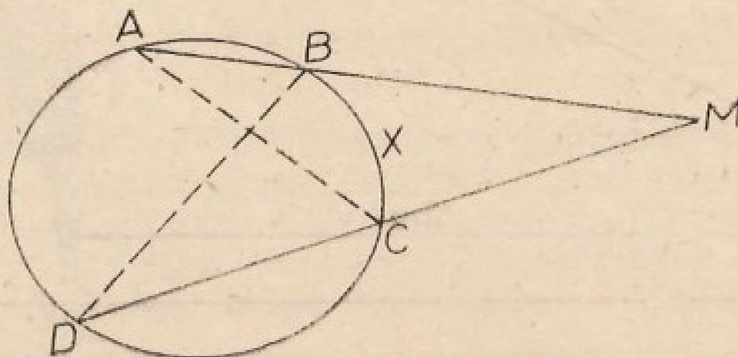


Fig. 1.33

Concluzia

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

Demonstrație. $\Delta MAC \sim \Delta MDB$ (cazul 2) deoarece $\sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle DMB$ (identice) și $\sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle MDB$ (ambele au ca măsuri jumătate din cea a arcului BXC). Deci $\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB}$ etc., q.e.d.

Observație. Teorema este adevărată, în cazul cînd M este exterior cercului, și pentru tangentele duse din M la cerc; pe o tangentă, punctele A și B coincid. Demonstrația se face la fel; pentru a nu ne baza pe o proprietate a tangentei, să observăm, pe figura I.34, în care O este centrul cercului, că $\sphericalangle MAC = 90° - \sphericalangle OAC = \frac{1}{2}(180° - 2\sphericalangle OAC) = \frac{1}{2}\sphericalangle AOC = \frac{1}{2}\widehat{AXC}$ (unde am omis a mai scrie „măs").

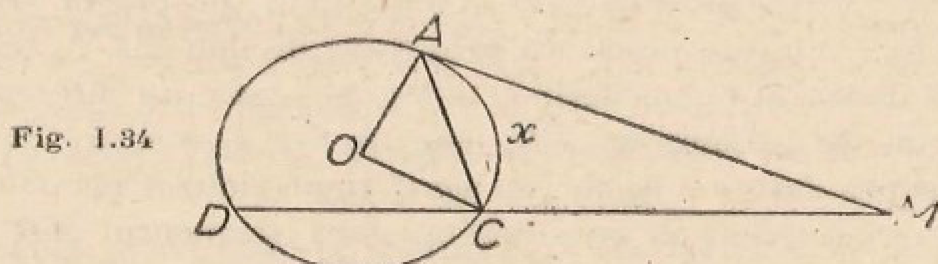


Fig. I.34

Teorema de mai sus ne conduce la următoarea:

Definiție. Fie M un punct și (C) un cerc.

a) Dacă M este în exteriorul cercului, numim „puterea lui M față de cerc" valoarea $MA \cdot MB$, unde A și B sînt intersecțiile unei drepte oarecare ce trece prin M cu cercul (C), luată cu semnul $+$.

b) Dacă M este pe cerc, spunem că puterea lui față de cerc este O.

c) Dacă M este în interiorul cercului, numim „puterea lui M față de cerc" valoarea $MA \cdot MB$, unde A și B sînt intersecțiile unei drepte oarecare ce trece prin M cu cercul (C), luată cu semnul $-$.

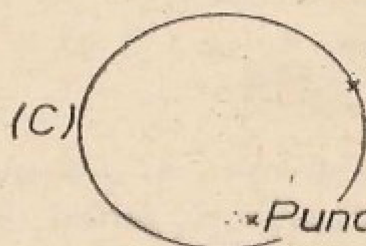


Fig. I.35

Observații. 1. Ce ne-ar fi împiedicat să dăm definiția de mai sus înainte de a demonstra teorema? Dacă vrem să definim „puterea unui punct M față de un cerc (C)" aceasta trebuie să fie un element, în cazul nostru un număr, care să depindă numai de punctul M și de cercul (C). Examinînd definiția de mai sus, vedem că numărul $MA \cdot MB$ definit în ea poate în principiu să

depindă nu numai de M și de cercul (C) ci și de „direcția" secantei MAB, cu alte cuvinte, încercînd să calculăm puterea lui M față de cercul (C) există „pericolul" de a obține rezultate diferite dacă folosim secante diferite. Dacă într-adevăr așa ceva s-ar întîmpla, am spune că „definiția este incorectă". Teorema de mai sus arată că așa ceva nu se întîmplă, deci că definiția „este corectă", adică, oricum am alege secanta MAB, obținem aceeași valoare pentru $MA \cdot MB$.*.

2. De ce considerăm puterea unui punct față de un cerc ca avînd semnul + sau —, după cum punctul este în exteriorul sau în interiorul cercului? Este primul pas pe calea „folosirii numerelor negative în geometrie" în acest manual. Știm că dacă spunem: fiind dat un punct A pe o dreaptă d, alegeți pe d un punct B astfel încît segmentul AB să aibă 2 cm, problema are două soluții, deci poziția lui B nu este precizată prin fraza de mai sus. Această nedeterminare poate fi înlăturată considerînd, în loc de segmente AB, care sînt tot una cu BA, segmente „orientate" AB, care nu vor fi socotite drept tot una cu BA. Pe o dreaptă dată d alegem „un sens" (materializat printr-o semidreaptă a ei s) și vom conveni să considerăm, dacă segmentul AB are de exemplu 2 cm, că segmentul orientat AB are +2 cm dacă semidreapta AB are același sens cu semidreapta s (deci dacă este conținută în s sau conține pe s) și că segmentul orientat AB are —2 cm dacă semidreapta AB este de sens contrar cu semidreapta s (deci dacă n-are puncte comune cu s sau dacă intersecția lor este interiorul unui segment)

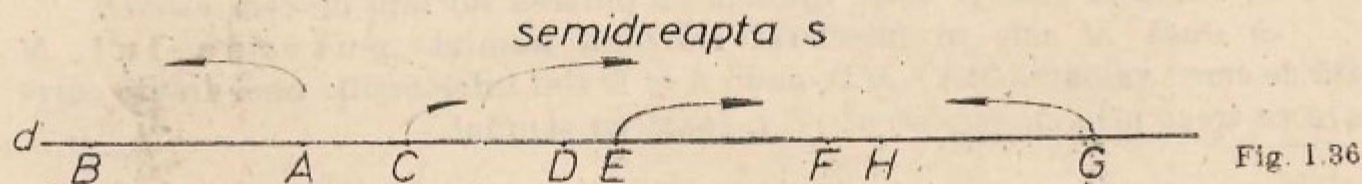


Fig. 1.36

AB = -2 cm   EF = +2 cm

CD = +2 cm   GH = -2 cm

După această convenție, dacă avem o dreaptă d, o semidreaptă a sa s, un punct A pe d și un număr a pozitiv sau negativ, putem găsi un punct B pe d și numai unul astfel încît lungimea segmentului orientat AB să fie a.

---

* În cazul de față am fi putut ocoli discuția de mai sus, definind puterea punctului cu ajutorul unei secante precizate; cea mai naturală alegere ar fi fost: secanta ce trece prin centru cercului față de cerc). Pe de o parte o astfel de definiție ar fi fost artificială, iar pe de altă parte nu în toate cazurile în care se dau definiții în situații cum este cea descrisă mai sus se pot alege astfel de „obiecte privilegiate" cum a fost aici secanta ce trece prin centru.

Dacă acceptăm și segmente orientate de forma AA, de lungime nulă, atunci cele spuse sînt valabile și în cazul $a = 0$. Vom reveni la această problemă la pag. 84.

În cazul puterii punctului față de cerc, în definiția de mai sus, este clar că, oricum am alege sensul pe secanta MAB, segmentele orientate MA și MB vor avea același sens, deci același semn, cînd M va fi în exteriorul cercului și vor avea sensuri deci semne contrare cînd M va fi în interior. Cînd M este pe cerc, unul din aceste segmente este nul. Deci produsul $MA \cdot MB$ al lungimii segmentelor orientate MA, MB va fi pozitiv cînd M va fi în exterior, nul cînd M va fi pe cerc și negativ cînd M va fi în interior. În acest mod „se explică" definiția de mai sus.

Problemă rezolvată

Tudorică, elev în clasa a 7-a își pune problema la ce distanță trebuie el să se așeze în fața statuii lui Mihai Viteazul, astfel încît ea să-i apară cît mai mare.

Evident astfel pusă problema de Tudorică ea nu poate fi rezolvată pentru că este formulată destul de imprecis. Ce înțelege Tudorică prin „cît mai mare"? E vorba de înălțimea statuii? Nu, mi-a precizat Tudorică, este vorba de unghiul α pe care îl „mătură" privirea mea, de la copita calului pînă la vîrful securii (fig. I.37). Îi atragem atenția lui Tudorică asupra faptului că,

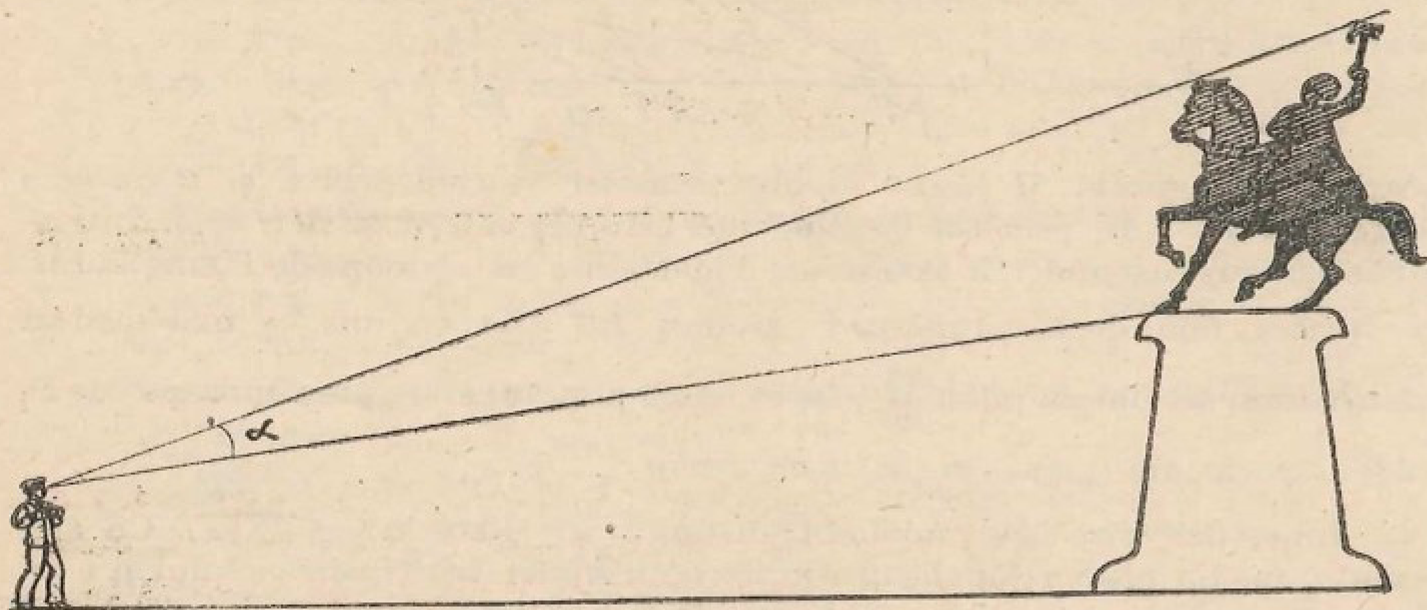


Fig. I.37

dacă stă foarte aproape, s-ar putea să nu mai vadă nici copita calului ci numai soclul și nici vîrful securii, ci numai creștetul și urechile calului. Din cauză că statuia are „relief"! Și atunci Tudorică a acceptat să simplifice pro-

blema: a formulat-o astfel: segmentul AC este perpendicular pe dreapta Ax (fig. I.38), B este un punct fix interior segmentului AC. Unde trebuie să se

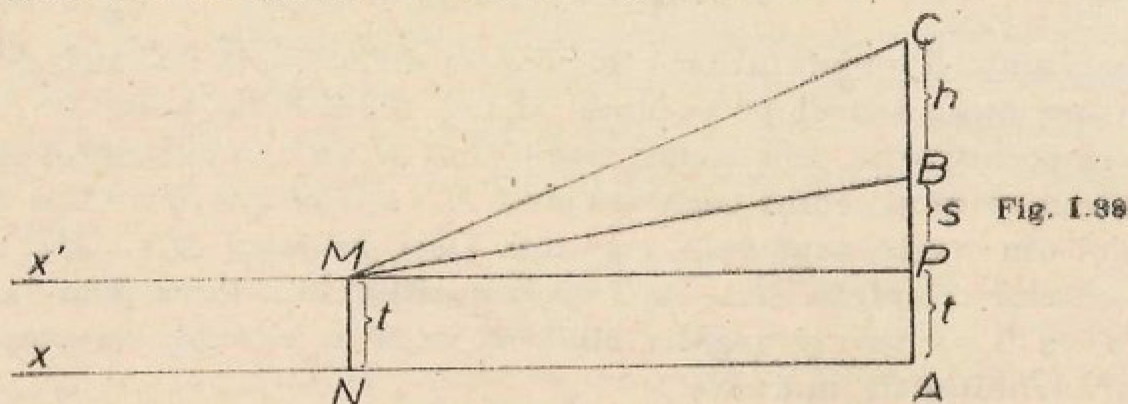


Fig. I.38

plaseze un segment MN ($N \in Ax$ şi $MN \perp Ax$) astfel încît $\sphericalangle BMC$ să fie maxim.

Vom simplifica şi mai mult problema. Este evident că segmentul MN reprezintă înălţimea t de la tălpile lui Tudorică pînă la nivelul ochilor săi, s diferenţa dintre înălţimea AB a soclului şi t şi h înălţimea statuii. Se cere distanţa $d = NA$. Mai desenăm o dată figura (fig. I.39).

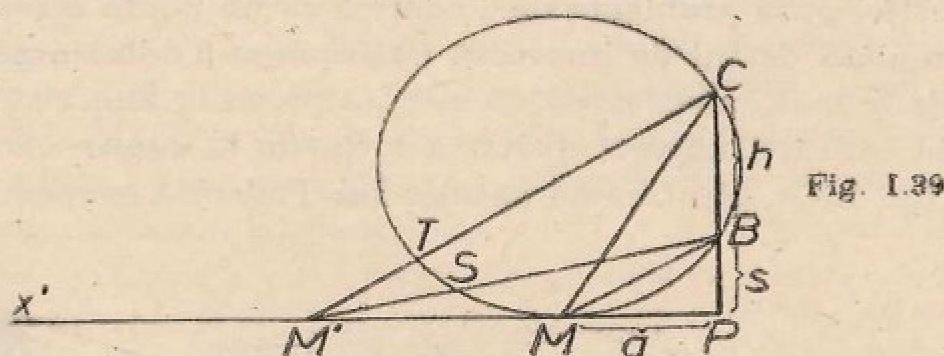


Fig. I.39

Afirmăm că punctul M căutat se obţine astfel: ducem prin C şi B un cerc tangent la Px'. M, punctul de tangenţă este cel căutat şi $MP = a$. Într-adevăr pentru orice punct M aşezat mai departe sau mai aproape de P, unghiul M' va fi mai mic decît jumătatea arcului BC (fie că din $\frac{BC}{2}$ mai scădem măsura unui arc dat de pildă $\frac{ST}{2}$, fie că, dacă punctul este „prea aproape" de P, scădem ceva din „mai puţin decît arcul $\frac{BC}{2}$") .

Bine, dar care este în fond distanţa a? Este $a = \sqrt{s(s+h)}$. Cu alte cuvinte, media proporţională între diferenţa dintre înălţimea soclului şi a lui Tudorică, cu diferenţa dintre distanţa de la sol pînă la vîrful securii statuii şi înălţimea lui Tudorică. Evident apare mai uşor de rezolvat problema decît de formulat nematematic soluţia ei.

În multe din explicaţiile care se dau cu ajutorul ei matematica devine o formă de exprimare mult mai simplă. Numai că trebuie să ne obişnuim cu ea...

5. Probleme

1. Să se arate că puterea unui punct exterior unui cerc față de acel cerc este egală cu pătratul distanței de la acel punct la punctul de contact al tangentei dusă din el la cerc.

2. Tangentele duse la două cercuri secante dintr-un punct situat pe dreapta ce trece prin cele două puncte comune celor două cercuri (și în exteriorul celor două cercuri) au lungimi egale.

3. Dacă un punct are puteri egale față de două cercuri secante, atunci el este situat pe dreapta ce unește cele două puncte comune celor două cercuri.

4. Care este locul geometric al punctelor ce au puteri egale față de două cercuri tangente?

5. Trei cercuri cu centrele necoliniare sînt secante două cîte două. Să se arate că cele trei coarde comune sînt concurente.

6. Se dau două segmente u, v. Construiți un segment de lungime $\sqrt{uv}$.

7. Se dau două puncte A, B și o dreaptă d. Să se construiască un cerc ce trece prin A, B și este tangent dreptei d (A, B sînt în același semiplan față de dreapta d). Cîte soluții are în general problema? Care este cazul de excepție?

8. Dați o nouă demonstrație teoremei de la pag. 28 în cazul cînd M este exterior cercului, arătînd asemănarea altei perechi de triunghiuri decît cea considerată în demonstrația dată acolo.

9. Dați o nouă demonstrație teoremei: dacă într-un patrulater convex diagonalele formează cu două laturi opuse unghiuri congruente, atunci unghiurile opuse ale patrulaterului sînt suplementare. Nu se va folosi nicăieri în demonstrație noțiunea de cerc!

10. Se consideră un cerc, un punct fix M nesituat pe acel cerc și un număr (pozitiv) k. Se consideră un punct A pe cerc și punctul B de pe semidreapta MA pentru care $MA \cdot MB = k$. Care este locul geometric al lui B cînd A parcurge cercul?

11. Care este locul geometric din problema 10, în cazul cînd M se află pe cerc?

12. Se consideră un patrulater inscriptibil $ABCD$.

a. Să se construiască un punct M, de aceeași parte a lui AD ca și B și C, astfel ca $\triangle AMD \sim \triangle ABC$.

b. Descoperiți pe figura formată alte două triunghiuri asemenea.

c. Demonstrați că $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD$.

13. Reluați construcția din problema precedentă în cazul unui patrulater convex oarecare $ABCD$ și demonstrați că, dacă $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD$, atunci patrulaterul este inscriptibil.

14. Ce devine enunțul problemei 5 dacă două din cercuri sînt tangente, iar al treilea este secant cu fiecare din ele? Folosiți rezultatul pentru a construi un cerc ce trece prin două puncte date și este tangent la un cerc dat.

RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

Pentru a deduce o primă consecință a teoremei din paragraful precedent (teoremă care se va numi „teorema asupra puterii punctului față de cerc"), să considerăm un triunghi dreptunghic ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, să ducem cercul de centru B și rază AB și să considerăm intersecțiile sale D și E cu BC.

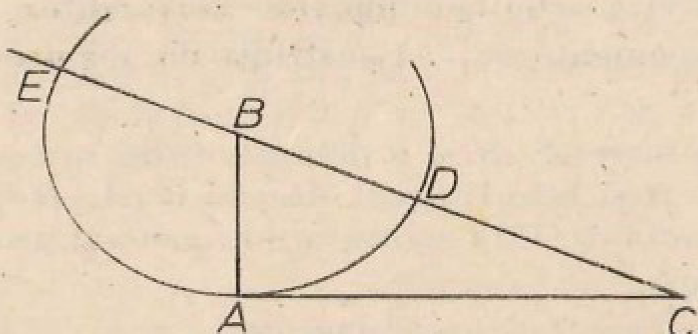


Fig. I.40

Cercul va fi tangent în A la AC, iar $BE = BD = BA$. Teorema asupra puterii punctului C față de acest cerc ne spune că $AC^2 = CE \cdot CD = (CB + AB)(CB - AB) = CB^2 - AB^2$. Obținem, ca primă consecință a teoremei puterii punctului față de cerc:

Teorema lui Pitagora. Într-un triunghi dreptunghic, suma pătratelor catetelor este egală cu pătratul ipotenuzei.

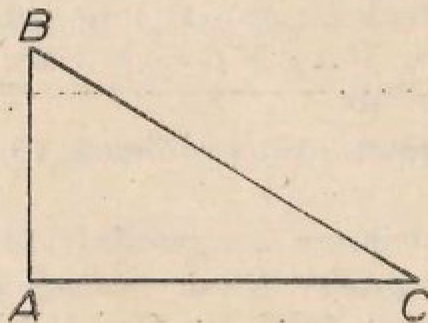


Fig. I.41

Importanța acestei teoreme este foarte mare. Ea reprezintă soluția unei probleme de tipul: se cunosc lungimile a două laturi ale unui triunghi și măsura unghiului cuprins între ele, să se calculeze lungimea celei de-a treia laturi (unghiul cuprins avînd o valoare particulară, de 90°).

Altă consecință a teoremei puterii punctului față de cerc se obține ducînd un diametru AB al unui cerc, alegînd un punct C pe tangenta în A la cerc și considerînd celălalt punct comun D al dreptei CB și al cercului (fig. I. 42).

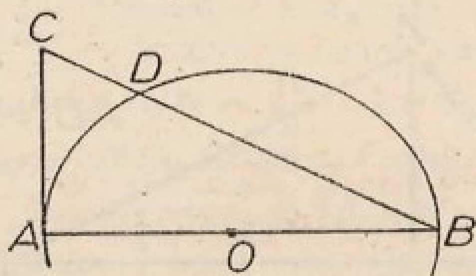


Fig. I.42

Vom avea $AB \perp AC$, $AD \perp BC$ și $AC^2 = CB \cdot CD$.

Cum orice triunghi dreptunghic se poate considera în situația triunghiului ABC din figură, obținem:

T e o r e m a   c a t e t e i. Într-un triunghi dreptunghic, o catetă este medie proporțională între ipotenuză și proiecția acestei catete pe ipotenuză*.

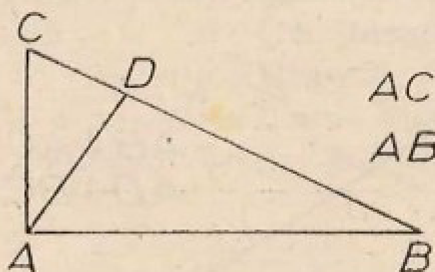


Fig. I.43

În fine, să considerăm un punct D în interiorul unui cerc și să ducem diametrul BC și coarda AA' perpendiculară pe acest diametru ce trec prin D (fig. I.44).

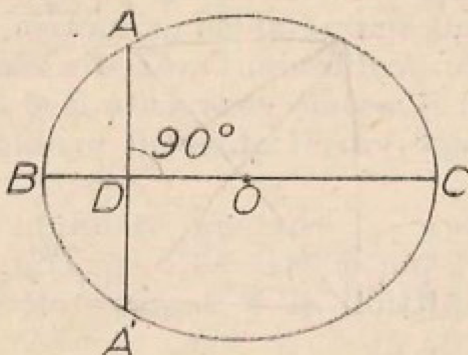


Fig. I.44

Avem $AD \equiv DA'$, $\sphericalangle BAC = 90°$ iar $DB \cdot DC = DA \cdot DA' = DA^2$. Deci:

---

* Prin proiecție a unui punct pe o dreaptă înțelegem piciorul perpendicularei duse din acel punct pe acea dreaptă. Proiecția unui segment este segmentul determinat de proiecțiile capetelor sale; se poate evident întîmpla ca proiecția unui segment să se „reducă" la un punct.

Teorema înălțimii. Într-un triunghi dreptunghic, înălțimea dusă din vîrful unghiului drept este medie proporțională între cele două segmente determinate de ea pe ipotenuză.

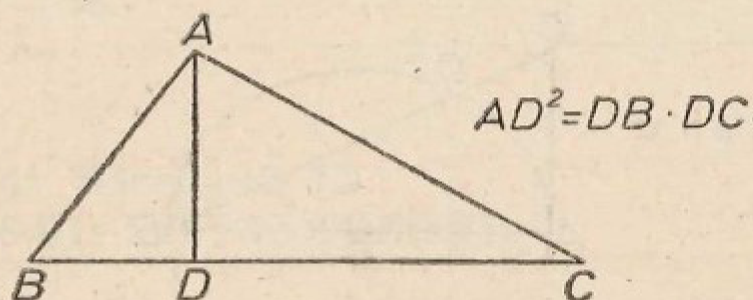


Fig. I.45

Observație. Teorema catetei și teorema înălțimii se pot demonstra și observînd că $\triangle ABC \sim \triangle DAC$ și că $\triangle ABD \sim \triangle CAD$ și alegînd, din relațiile de proporționalitate ale laturilor, cîte două rapoarte egale, relativ la care se scrie egalitatea dintre produsul mezilor și cel al extremilor.

Cele trei teoreme de mai sus ne permit să „stăpînim situația“ din figura I.46, în care este desenat un triunghi dreptunghic ABC și înălțimea sa AD dusă din vîrful unghiului drept A.

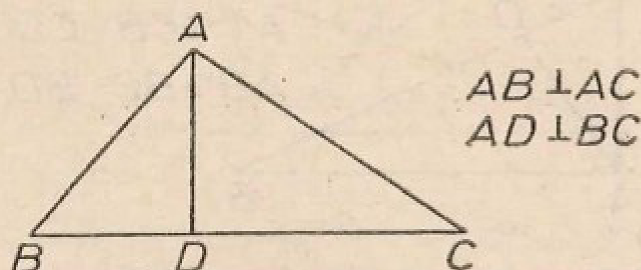


Fig. I.46

Mai precis, aceste teoreme ne permit, cunoscînd lungimile a două din cele șase segmente ce apar în figura I. 46 — două catete, ipotenuza, înălțimea, cele două proiecții ale catetelor pe ipotenuză — să calculăm lungimile celorlalte patru. Ținînd seamă și de „simetria situației“ (nu a figurii!), se pot formula nouă astfel de probleme. Două din ele sînt mai dificile și vor fi rezolvate în continuare (problemele rezolvate 2 și 3). Vom începe cu una din cele simple, iar celelalte șase vor fi obiectul problemelor 1—6 ce le veți avea de rezolvat.

Problemă rezolvată 1. Într-un triunghi dreptunghic ABC, lungimile catetelor sînt $AB = 4$ cm și $AC = 3$ cm (fig. I, 47). Să se determine lungimile ipotenuzei, a înălțimii și a segmentelor determinate pe ipotenuză de piciorul înălțimii.

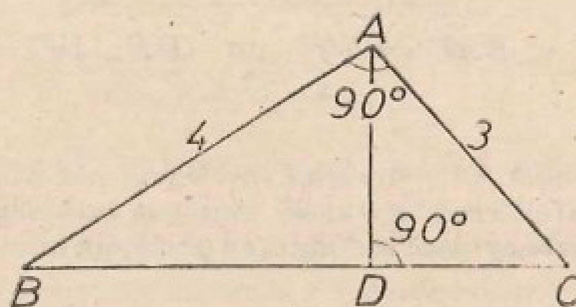


Fig. I.47

Ipoteza | *Concluzia*

$AB \perp AC$, $AD \perp BC$ — $BC = \ldots$, $AD = \ldots$

$AB = 4$, $AC = 3$ — $BD = \ldots$, $CD = \ldots$

Rezolvare. Din teorema lui Pitagora deducem $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, deci $BC = \sqrt{25} = 5$. Din teorema catetei deducem $AB^2 = BD \cdot BC$, deci $BD = \frac{AB^2}{BC}$ adică $BD = \frac{16}{5}$. Avem acum două posibilități de a calcula CD: una constă în a aplica teorema catetei pentru AC, cealaltă în a scrie $CD = BC - BD = 5 - \frac{16}{5} = \frac{9}{5}$. În fine, avem trei posibilități de a calcula AD: teorema lui Pitagora în dreptunghiurile dreptunghice ABD, ACD și teorema înălțimii. Prima dă $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{16}{5}\right)^2} = \frac{12}{5}$.

Observație. Din $\Delta ABC \sim \Delta DAC$ deducem și $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{AC}$, sau $AB \cdot AC = AD \cdot BC$, relație care oferă o a patra posibilitate de calcul al lui AD. Această relație nu reprezintă altceva decît „aria lui ABC, calculată în două moduri" (vezi și pag. 61—62).

Problemă rezolvată 2. Într-un triunghi dreptunghic ABC cunoaștem lungimile ipotenuzei $BC = a$ și ale înălțimii $AD = h$. Să se determine lungimile proiecțiilor BD, DC ale catetelor pe ipotenuză (fig. I. 48).

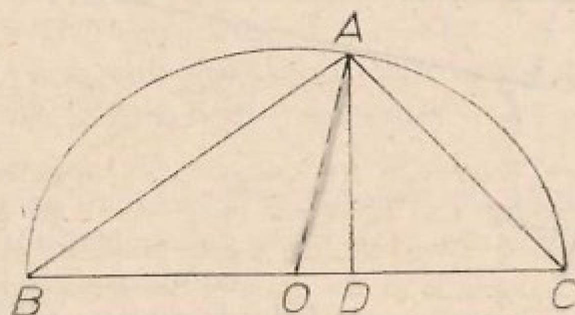


Fig. I.48

Ipoteza | *Concluzia*

$AB \perp AC$, $AD \perp BC$ — $BD = \ldots$, $CD = \ldots$

$BC = a$, $AD = h$

Rezolvare. Unghiul BAC fiind drept, rezultă că BC este un diametru al cercului circumscris triunghiului ABC, deci centrul O al acestui cerc se află la mijlocul lui BC. Deducem $OA = \frac{1}{2} BC = \frac{a}{2}$ și acum este simplu de continuat: teorema lui Pitagora în ΔOAD dă $OD = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - h^2}$ și obținem ca rezultat $BD = BO + OD = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - h^2}$, $CD = CO - OD = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - h^2}$. Evident că acest rezultat corespunde modului de a nota astfel figura încît D să fie între O și C.

a și h fiind date, condiția necesară și suficientă de existență a triunghiului din enunț este $h \leq \frac{a}{2}$ (aceasta este condiția necesară și suficientă pentru a putea construi $\triangle OAD...$).

Odată determinate BD, CD, putem calcula AB, AC aplicînd teorema lui Pitagora în $\triangle ABD$, $\triangle ACD$.

Observație. Ținînd seamă de teorema înălțimii, formulele obținute rezolvă și problema: cunoscînd suma a și produsul h^2 a două numere (lungimile BD, CD), să se afle cele două numere. Verificați și cu ajutorul calculului algebric aceasta.

Problemă rezolvată 3. Într-un triunghi dreptunghic ABC se cunosc lungimile unei catete AC și a proiecției BD a celeilalte catete pe ipotenuză. Să se afle lungimile ipotenuzei BC și a proiecției CD a celeilalte catete pe ipotenuză (fig. I.49).

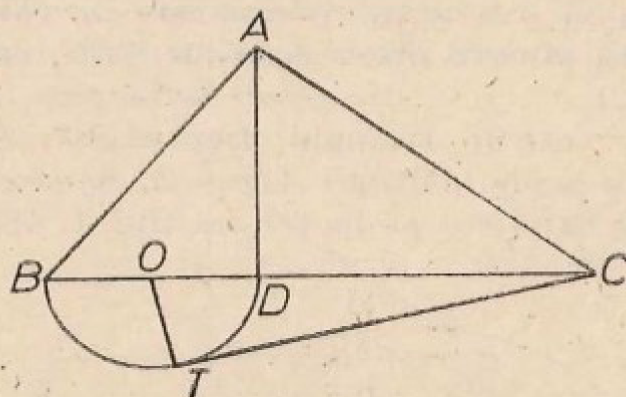


Fig. I.49

Ipoteza

$AB \perp AC$, $AD \perp BC$.

$AC = b$, $BD = d$

Concluzia

$BC = ...$, $CD = ...$

Rezolvare. Să considerăm cercul de diametru BD și să ducem o tangentă CT la acest cerc. Fie O centrul cercului. Teorema catetei spune că $AC^2 = CD \cdot CB$, iar teorema asupra puterii punctului că $CT^2 = CD \cdot CB$. Deducem că $CT = AC = b$. Avem $OT \perp CT$ și teorema lui Pitagora în $\triangle CTO$ dă $CO = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + b^2}$; obținem $BC = CO + OB = \frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + b^2}$ iar $CD = CO - OD = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + b^2} - \frac{d}{2}$.

Oricum am alege două numere b, d, există un triunghi ce îndeplinește condițiile din enunț (se construiește $\triangle COT$ cu $\sphericalangle T = 90°$ etc.).

Formulele obținute rezolvă și problema: cunoscînd diferența d și produsul b^2 a două numere (lungimile CB, CD) să se afle cele două numere (verificați aceasta și prin algebră).

6. Probleme

1. Ipotenuza unui triunghi dreptunghic est de 13 cm, iar una din catete este de 5 cm. Aflați cealaltă catetă, înălțimea și proiecțiile catetelor pe ipotenuză.

2. O catetă a unui triunghi dreptunghic este de 10 cm, iar înălțimea de 8 cm. Aflați celelalte elemente ale triunghiului.

3. O catetă a unui triunghi dreptunghic este de 15 cm, iar proiecția sa pe ipotenuză de 9 cm. Aflați celelalte elemente.

4. Înălțimea unui triunghi dreptunghic este de 24 cm, iar proiecția unei catete pe ipotenuză de 10 cm. Aflați celelalte elemente.

5. Ipotenuza unui triunghi dreptunghic este de 50 cm, iar proiecția unei catete pe ea este de 5 cm. Aflați celelalte elemente.

6. Proiecțiile catetelor unui triunghi dreptunghic pe ipotenuză sînt de 7 cm și 63 cm. Aflați celelalte elemente.

7. Enunțați și demonstrați o reciprocă a teoremei lui Pitagora.

8. Deduceți teorema lui Pitagora din teorema catetei.

9. Redactați o demonstrație a teoremei lui Pitagora fără a folosi cercuri, și nici teorema catetei (însă reconstituind figura I.40).

10. Care este lungimea diagonalei unui pătrat de latură a?

11. Care este lungimea înălțimii unui triunghi echilateral de latură 4 cm?

12. Ipotenuza unui triunghi dreptunghic isoscel este de 4 cm. Să se calculeze catetele triunghiului.

13. Un triunghi dreptunghic are o catetă de 5 cm, iar unghiul opus ei este de 30°. Calculați lungimile ipotenuzei, a celeilalte catete, a înălțimii etc.

14. Într-un trapez dreptunghic, bazele au 10 cm și 7 cm, iar latura neparalelă perpendiculară pe ele este de 4 cm. Calculați lungimile celeilalte laturi și ale diagonalelor.

15. Un trapez dreptunghic are bazele de 11 cm și 7 cm, iar una din diagonale de 15 cm. Să se calculeze lungimile laturilor neparalele și a celeilalte diagonale.

16. Un triunghi isoscel are laturile congruente de 10 cm iar baza de 8 cm. Calculați înălțimea corespunzătoare bazei.

17. În problema precedentă calculați și celelalte înălțimi ale triunghiului.

18. O coardă a unui cerc de rază 15 cm are lungimea de 8 cm. Calculați distanța de la centrul cercului la acea coardă.

19. Care este cea mai mică putere ce o poate avea un punct față de un cerc de rază R? Care este punctul de putere minimă?

20. Care este lungimea tangentei dusă dintr-un punct la un cerc de rază 3 cm, dacă distanța de la acel punct la centrul cercului este de 8 cm?

21. Calculați lungimea tangentelor comune a două cercuri tangente exterioare de raze R și r.

22. Calculați lungimile tangentelor comune exterioare și interioare a două cercuri de raze 8 cm și 5 cm, dacă distanța dintre centrele lor este de 20 cm.

23. Dați diferite metode de a construi un segment de lungime $\sqrt{uv}$, u și v fiind lungimile unor segmente date.

24. Găsiți un triunghi dreptunghic astfel încît lungimile laturilor, a înălțimii și a proiecțiilor catetelor pe ipotenuză să fie toate numere întregi.

25. Latura unui romb este de 11 cm, iar lungimea unei diagonale de 15 cm. Este această diagonală mai mare sau mai mică decît cealaltă diagonală?

26. Diagonala unui dreptunghi este 10 cm iar una din laturi este de 7 cm. Este acea latură „lungimea" sau „lățimea"?

27. Un patrulater $ABCD$ înscris într-un cerc de rază 25 cm are diagonalele perpendiculare, depărtate de centrul cercului la 7 cm respectiv 15 cm. Să se calculeze lungimile laturilor patrulaterului. Să se calculeze și lungimile diagonalelor și să se verifice relația din problema 12 adică $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

28. Enunțați o reciprocă a teoremei înălțimii care să fie incorectă!

29. Într-un triunghi ABC, unghiul A este ascuțit dacă și numai dacă $BC^2 < AB^2 + AC^2$.

Observație. Desigur că ați rezolvat cu ușurință problema 10, aflînd astfel că lungimea diagonalei unui pătrat de latură 1 cm este $\sqrt{2}$ cm. Deci construcții simple aplicate unor segmente cu lungimi raționale (chiar întregi) conduc la segmente de lungimi iraționale. Descoperirea acestui fapt a produs o mare surpriză în lumea matematicienilor greci, înaintea erei noastre.

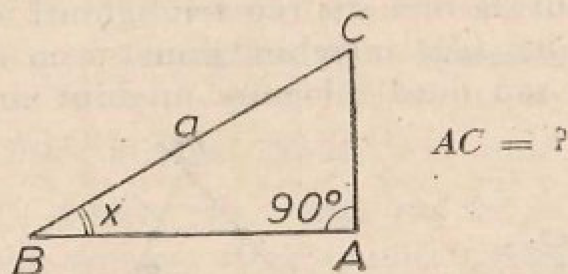
Există totuși triunghiuri dreptunghice ale căror laturi au toate trei lungimi întregi. Unul din ele este cel de catete 3 și 4 și de ipotenuză 5. Rezolvînd probleme ați întîlnit probabil și altele. Se cunoaște forma generală a tripletelor de numere naturale $\neq 0$ (x, y, z) pentru care $x^2 + y^2 = z^2$, anume $x = k(p^2 - q^2)$, $y = 2kpq$, $z = k(p^2 + q^2)$ sau același cu x permutat cu y, în care k, p, q sînt numere naturale, $p > q$ și, pentru a evita repetițiile, se presupune că p și q sînt prime între ele și sînt unul par și celălalt impar. Prezența factorului k este ușor de înțeles dacă avem în vedere noțiunea de triunghiuri asemenea. Să dăm cîteva exemple, toate cu $k = 1$. $p = 2$, $q = 1$ dă (3, 4, 5), $p = 3$, $q = 2$ dă (5, 12, 13), $p = 4$, $q = 1$ dă (15, 8, 17), $p = 4$, $q = 3$ dă (7, 24, 25), $p = 5$, $q = 2$ dă (21, 20, 29), $p = 5$, $q = 4$ dă (9, 40, 41) etc. Puteți folosi aceste triplete pentru a compune voi înșivă probleme în care să nu „apară radicali" în cursul rezolvării lor. Puteți verifica ușor că x, y, z definiți prin formulele de mai sus verifică relația $x^2 + y^2 = z^2$.

Mai greu, dar nu dincolo de posibilitățile voastre de înțelegere, este de a dovedi că orice triplet de numere întregi (x, y, z) pentru care $x^2 + y^2 = z^2$ se obține prin formulele de mai sus cu k, p, q întregi.

SINUSUL ȘI COSINUSUL UNUI UNGHI

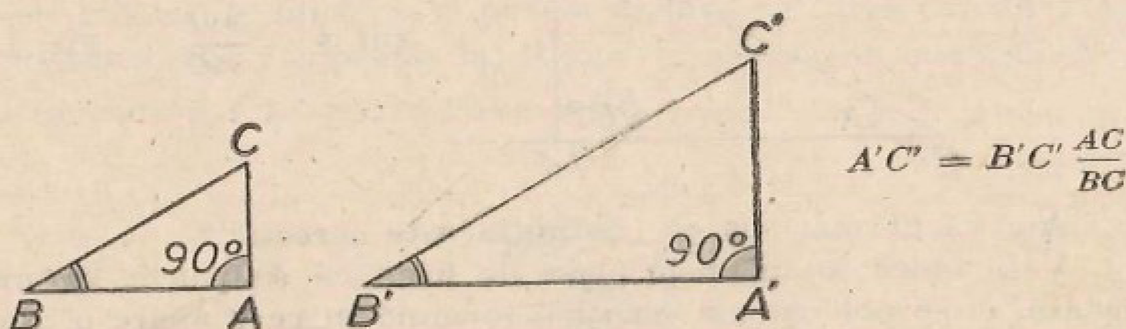
După ce în ultimul paragraf am învățat să calculăm, cunoscînd lungimile a două laturi ale unui triunghi dreptunghic, lungimea celei de-a treia laturi, ne vom pune aci problema de a determina, cunoscînd lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic și măsura unuia din unghiurile sale ascuțite, lungimea laturii opuse acelui unghi (fig. I.50).

Fig. I.50



Răspunsul la această problemă nu se poate da cu ajutorul unei formule care să conțină numai operații cu numere cunoscute pînă acum. Situația nu este însă atît de „gravă" încît să fim obligați să rezolvăm de fiecare dată o astfel de problemă printr-o măsurătoare. Anume, să observăm că dacă în două triunghiuri dreptunghice cu $\sphericalangle A = \sphericalangle A' = 90°$ unghiurile din B și B' sînt congruente atunci triunghiurile sînt asemenea (cazul 2) și deci $\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$, deci cunoscînd ipotenuzele lor și cateta AC din primul determinăm cu ușurință cateta $A'C'$ din celălalt (fig. I. 51).

Fig. I.51

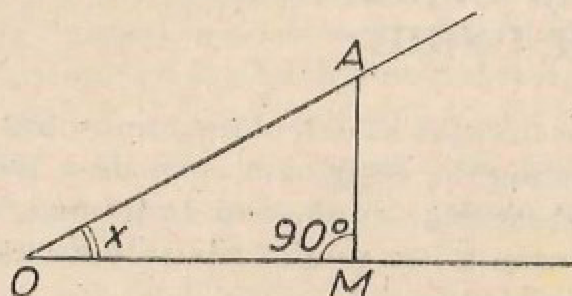


$A'C' = B'C' \frac{AC}{BC}$

Cu alte cuvinte este suficient să cunoaștem raportul $\frac{AC}{BC}$ într-un triunghi dreptunghic care are măsura unghiului B egală cu x, pentru a putea calcula

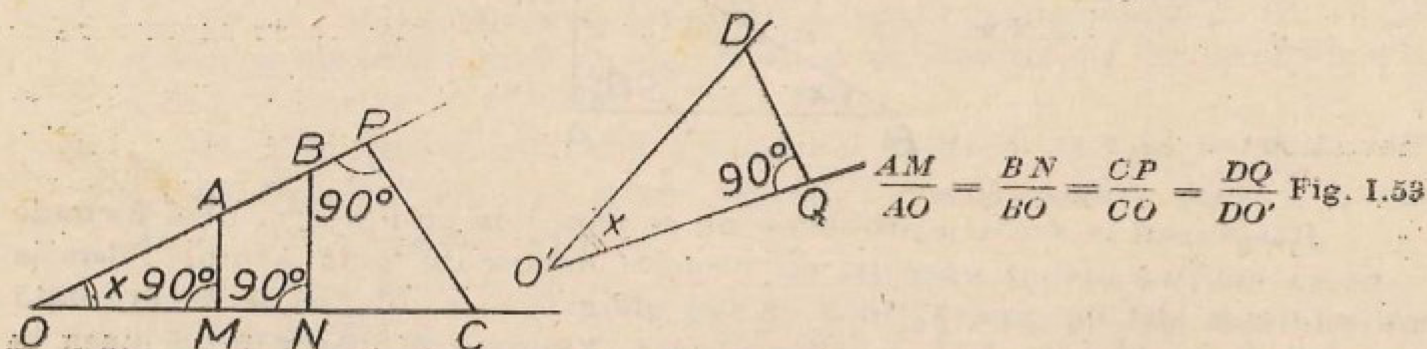
cateta opusă unui unghi de măsură x în orice triunghi dreptunghic căruia i se cunoaște ipotenuza.

Ajungem la concluzia că este preferabil să caracterizăm mărimea unui unghi ascuțit nu prin numărul său de grade, ci prin raportul dintre distanța de la un punct de pe una din laturile sale la cealaltă latură și distanța de la acel punct la vîrful unghiului (fig. I. 52).



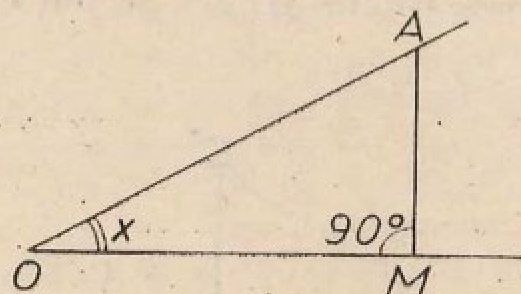
Nu x ci $\frac{AM}{AO}$ Fig. I.52

Raționamentul de mai sus (cu triunghiuri asemenea) ne arată că acest raport nu se schimbă dacă înlocuim punctul cu alt punct de pe acea latură sau de pe cealaltă sau dacă înlocuim unghiul cu altul congruent.



$\frac{AM}{AO} = \frac{BN}{BO} = \frac{CP}{CO} = \frac{DQ}{DO'}$ Fig. I.53

Definiție. Dacă $0^\circ < x < 90^\circ$, se numește $\sin x$, **și se citește „sinus de x", raportul dintre cateta opusă unghiului x și ipotenuză într-un triunghi dreptunghic care are unul din unghiurile sale ascuțite de măsură x.**



$\sin x = \frac{AM}{AO}$ Fig. I.54

Am văzut mai sus că „definiția este corectă"*

Veți vedea în ultimele clase de liceu că sinusurile de unghiuri nu se măsoară, ci se pot calcula printr-o formulă în care apare o „sumă infinită", formulă ce „începe" astfel:

$$\sin x = \frac{\pi x}{180} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi x}{180}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{\pi x}{180}\right)^5 - \dots$$

* Vezi la pag. 30 sensul acestei expresii.

Dăm mai jos o tabelă, (calculată, de exemplu, pe baza formulei de mai sus), în care figurează valorile lui sin x, cu trei zecimale exacte, pentru toți x exprimați printr-un număr întreg de grade, cuprins între 0° și 90°.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0°		0,017	0,035	0,052	0,070	0,087	0,105	0,122	0,139	0,156
10°	0,174	0,191	0,208	0,225	0,242	0,259	0,276	0,292	0,309	0,326
20°	0,342	0,358	0,375	0,391	0,407	0,423	0,438	0,454	0,469	0,485
30°	0,500	0,515	0,530	0,545	0,559	0,574	0,588	0,602	0,616	0,629
40°	0,643	0,656	0,669	0,682	0,695	0,707	0,719	0,731	0,743	0,755
50°	0,766	0,777	0,788	0,799	0,809	0,819	0,829	0,839	0,848	0,857
60°	0,866	0,875	0,883	0,891	0,899	0,906	0,914	0,921	0,927	0,934
70°	0,940	0,946	0,951	0,956	0,961	0,966	0,970	0,974	0,978	0,982
80°	0,985	0,988	0,990	0,993	0,995	0,996	0,998	0,999	0,999	1,000

(ultima valoare este 1,000 prin „rotunjire prin adaos")

Cu ajutorul acestei tabele putem răspunde la două tipuri de întrebări:

1) Să se afle sin 23°. Găsim din tabel $\sin 23° = 0{,}391$; mai precis, deoarece tabelul conține valori aproximative numai: $0{,}3905 < \sin 23° < 0{,}3915$.

2) Sinusul unui unghi este 0,32. Care este măsura x a acelui unghi? Din tabel găsim că $\sin 18° = 0{,}309 < 0{,}32 < 0{,}326 = \sin 19°$, deci x este cuprins între 18° și 19°.

Există și tabele mai precise, cu mai multe zecimale, și din „minut în minut" etc.

Observația 1. Putem determina măsura x a unui unghi și dacă știm de exemplu că $\sin \frac{x}{2} = 0{,}16$. Din tabel obținem $9° < \frac{x}{2} < 10°$ deci $18° < x <$ $< 20°$.

2. Din cele cunoscute pînă acum putem deduce valoarea exactă a sinusurilor a trei unghiuri. Știm (teorema lui Pitagora) că într-un triunghi dreptunghic isoscel de catetă a ipotenuza este $a\sqrt{2}$.

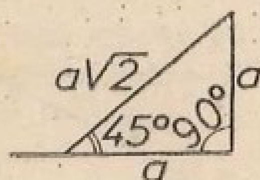


Fig. 1.55

Deci $\sin 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ştim că într-un triunghi dreptunghic de ipotenuză a ce are un unghi ascuţit de $30°$ cateta opusă acelui unghi este $\frac{a}{2}$ (deoarece „completînd" triunghiul se obţine un triunghi echilateral, fig. I. 56).

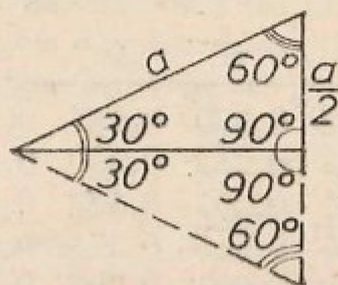


Fig. I.56

Deci $\sin 30° = \frac{1}{2}$.

În acelaşi triunghi lungimea celeilalte catete este $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (teorema lui Pitagora) deci $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Problemă rezolvată 1. Cunoscînd ipotenuza şi un unghi ascuţit ale unui triunghi dreptunghic, să se afle catetele (fig. I. 57).

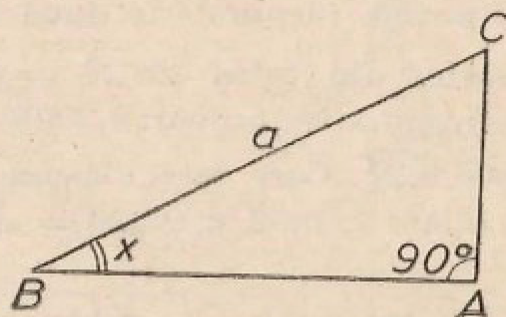


Fig. I.57

Ipoteza
$BC = a$, $\sphericalangle B = x$, $\sphericalangle A = 90°$.

Concluzia
$AB = ...$, $AC = ...$

Rezolvare. Avem prin definiţie $\frac{AC}{a} = \sin x$, deci $AC = a \sin x$. Teorema lui Pitagora dă $AB = \sqrt{a^2 - AC^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 x} = a\sqrt{1 - \sin^2 x}$.

Mai puteam scrie, deoarece $\sphericalangle C = 90° - x$, şi $AB = a \sin C = a \sin(90° - x)$.

Observaţie. Să remarcăm că am scris $\sin^2 x$ în loc de $(\sin x)^2$; aceasta este o convenţie de scriere.

Problemă rezolvată 2. Cunoscînd o catetă şi ipotenuza unui triunghi dreptunghic, să se afle unghiurile triunghiului (fig. I. 58).

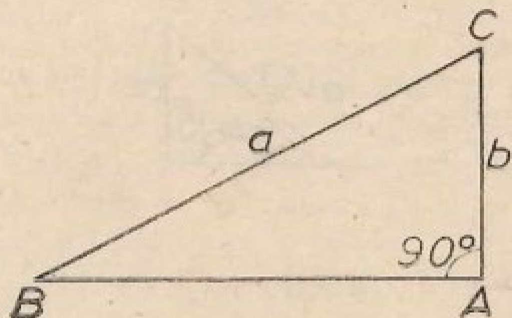


Fig. I.58

Ipoteza *Concluzia*

$\sphericalangle A = 90°,\ BC = a,\ AC = b$ $\sphericalangle B = ...,\ \sphericalangle C = ...$

Rezolvare. Conform definiției avem $\sin B = \frac{b}{a}$ și această relație constituie un răspuns la întrebarea „care este măsura $\sphericalangle B$?".

Măsura $\sphericalangle C$ se determină fie din $\sphericalangle C = 90° - \sphericalangle B$, fie din $\sin C = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ $\left(\text{teorema lui Pitagora, } \sin C = \frac{AB}{a}\right)$.

Ținînd seamă de rezultatul din problema rezolvată 1, se dă:

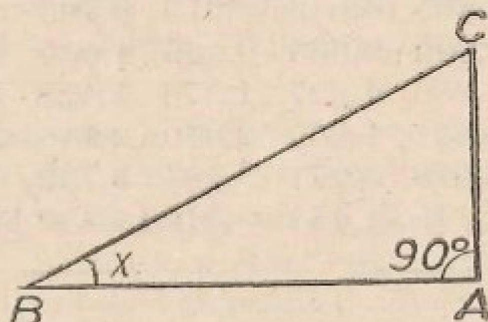
Definiție. Dacă $0° < x < 90°$ se numește $\cos x$ și se citește „cosinus de x" numărul $\sin(90° - x)$.

Sinusul și cosinusul unui unghi se numesc și „funcții trigonometrice ale acelui unghi".

CE ȘTIM DESPRE SINUS ȘI COSINUS?

a. Într-un triunghi dreptunghic ABC cu $\sphericalangle A = 90°$ avem $AC = BC \sin B$, $AB = BC \cos B$ (fig. I. 59).

Fig. I. 59



b. $0 < \sin x < 1$; $0 < \cos x < 1$.

c. $\cos x = \sin(90° - x)$. Aceasta ne permite să folosim tabelul de la pagina 43 și la calculul cosinusului unui unghi dat și la determinarea unui unghi cînd i se cunoaște cosinusul.

d. Din rezolvarea problemei 1 am văzut că $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ deci $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pentru orice x (cuprins între 0° și 90°).

Aceasta este o expresie „trigonometrică" a teoremei lui Pitagora.

e. $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ deci $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$.

TANGENTA UNUI UNGHI

Dacă într-un triunghi dreptunghic ABC cu $A = 90°$ cunoaştem $AC = b$ şi $C = x$, atunci ipotenuza $BC = \frac{b}{\cos x}$, iar cealaltă catetă $AB = BC \sin x = b \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$. Cu aceasta am rezolvat problema: cunoscînd lungimea unei catete şi unghiul alăturat dintr-un triunghi dreptunghic, să se determine lungimea celeilalte catete.

În rezolvarea numerică a acestei probleme, sîntem în situaţia de a face o împărţire a două numere ($\sin x$ şi $\cos x$) pe care le luăm din tabelul de la pag. 43. Să introducem:

Definiţie. Se numeşte tangentă a unui unghi x, pentru care $0° < x < 90°$, cîtul dintre sinusul acelui unghi şi cosinusul său.

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Tabela de valori a tangentei uşurează calculul de mai sus.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0°		0,017	0,035	0,052	0,070	0,087	0,105	0,123	0,141	0,158
10°	0,176	0,194	0,213	0,231	0,249	0,268	0,287	0,306	0,325	0,344
20°	0,364	0,384	0,404	0,424	0,445	0,466	0,488	0,510	0,532	0,554
30°	0,577	0,601	0,625	0,649	0,675	0,700	0,727	0,754	0,781	0,810
40°	0,839	0,869	0,900	0,933	0,966	1,000	1,036	1,072	1,111	1,150
50°	1,192	1,235	1,280	1,327	1,376	1,428	1,483	1,540	1,600	1,664
60°	1,732	1,804	1,881	1,963	2,050	2,145	2,246	2,356	2,475	2,605
70°	2,747	2,904	3,078	3,271	3,487	3,732	4,011	4,331	4,705	5,145
80°	5,671	6,314	7,115	8,144	9,514	11,430	14,301	19,081	28,636	57,290

Se introduce şi:

Definiţie. Se numeşte cotangentă a unghiului x pentru $0° < x < 90°$ cîtul dintre cosinusul acelui unghi şi sinusul său, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

7. Probleme

1. Examinaţi tabelul de valori al sinusului şi răspundeţi la întrebarea: dacă $x < y$ atunci avem $\sin x < \sin y$, $\sin x > \sin y$ sau $\sin x = \sin y$?

Demonstraţi apoi răspunsul (evident că tabelul, ce nu conţine decît valorile lui $\sin x$ pentru x întreg, nu ne poate ajuta în această demonstraţie); amintiţi-vă teoremele de la „inegalităţi" (Geometria cl. a VI-a)

2. Aceeaşi întrebare pentru cosinus.

3. Examinați diferențele dintre valorile succesive ale sinusului din tabelul de mai sus; mai precis examinați valorile expresiei $\sin(x+1°) - \sin x$ pentru x întreg. Unde crește sinusul mai repede, în zona valorilor mici sau a celor mari ale lui x?

4. Care sînt valorile lui x pentru care $\sin x = \cos x$?

5. Ce puteți spune despre măsura x a unui unghi ascuțit pentru care $\sin x = 0{,}8$? Dar dacă știm că $\cos y = 0{,}55$?

6. Ipotenuza unui triunghi dreptunghic are lungimea a, iar unul din unghiurile ascuțite măsura x. Să se exprime lungimile catetelor, ale înălțimii, ale proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.*

7. Înălțimea unui triunghi dreptunghic corespunzătoare unghiului drept are lungimea h, iar unul din unghiurile ascuțite ale triunghiului are măsura x. Exprimați lungimile ipotenuzei, ale catetelor etc.

8. Baza mică a unui trapez dreptunghic are lungimea b, latura „oblică" are lungimea c, iar unghiul ascuțit măsura x. Să se exprime baza mare, latura perpendiculară și diagonalele.

9. Într-un cerc de rază R se consideră un unghi la centru de măsură x. Care este lungimea coardei „corespunzătoare"?

10. Un triunghi isoscel are unghiurile de la bază de măsură x, iar laturile congruente de lungime a. Să se calculeze baza, înălțimea corespunzătoare bazei și înălțimile corespunzătoare laturilor congruente.

11. Se cunosc lungimile bazei și a laturilor congruente dintr-un triunghi isoscel. Să se scrie o relație din care să se poată determina unghiul de la vîrf al triunghiului (relația va conține, evident, „sinus" sau „cosinus").

12. Cunoscînd lungimea și lățimea unui dreptunghi, să se determine măsura unghiului ascuțit format de diagonalele sale.

13. Un punct este la distanța de 15 m de centrul unui cerc de rază 5 cm. Sub ce unghi „se vede cercul" din acel punct (cu alte cuvinte, care este unghiul format de tangentele duse din acel punct la cerc)?

14. Două cercuri de raze R și r au distanța d între centre. Sub ce unghi se văd cercurile din punctul de intersecție al tangentelor comune exterioare? Dar din cel al tangentelor comune interioare?

15. O dreaptă este la distanța d de centrul unui cerc de rază R. Care este unghiul format de dreaptă cu tangenta la cerc într-un punct de intersecție al dreptei cu cercul?

16. În $\triangle ABC$ cu $\sphericalangle A = 90°$ ducem $AD \perp BC$, $DE \perp AB$, $EF \perp BC$. Exprimați BF și AF cunoscînd $BC = a$ și $\sphericalangle B = x$.

17. Arătați că $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$.

18. Arătați că $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}(90° - x)$.

19. Calculați $\operatorname{tg} 29°$, $\operatorname{ctg} 44°$ etc.

* La această problemă ca și la cele ce urmează se vor considera și exemple numerice.

20. Ce puteți spune despre unghiurile x, y dacă $\text{tg}\, x = 2{,}1$ și $\text{ctg}\, y = 0{,}5$?

21. Arătați că dacă $x < y$ atunci $\text{tg}\, x < \text{tg}\, y$ iar $\text{ctg}\, x > \text{ctg}\, y$.

22. Determinați tangenta și cotangenta unghiurilor de 30°, 45° și 60°.

Rezolvarea triunghiurilor oarecare

În acest paragraf vom rezolva cele trei probleme puse încă de anul trecut, la lecția despre construcția triunghiurilor.

Problemă rezolvată 1. Într-un triunghi se cunosc lungimile a două laturi și măsura unghiului cuprins. Să se determine lungimea celei de-a treia laturi și măsurile celorlalte două unghiuri.

Să considerăm întîi un caz concret, în care să presupunem că „unghiul cuprins" este dat nu prin măsura sa ci prin cosinusul său (fig. I. 60).

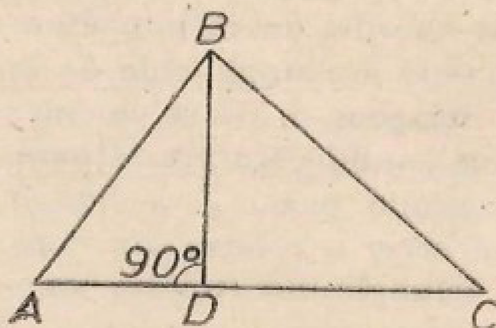


Fig. I.60

Ipoteza

$AB = 5$, $AC = 7$, $\sphericalangle A < 90°$, $\cos A = 0{,}4$.

Concluzia

$BC = ...$, $\sphericalangle C = ...$
$\sphericalangle B = ...$

Rezolvare. Pentru a putea aplica relațiile din triunghiul dreptunghic ce le cunoaștem, să ducem înălțimea BD. Vom avea din $\triangle ABD$, $AD = AB\cos A = 5 \cdot 0{,}4 = 2$, $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{21}$, apoi $DC = 7 - 2 = 5$ și din $\triangle BDC$, $BC = \sqrt{BD^2 + DC^2} = \sqrt{46}$, $\sin C = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{46}} = \sqrt{\frac{21}{46}} = \sqrt{0{,}4565} = 0{,}67...$, $C = 42°...$ iar $\sphericalangle ABC = 180° - (\sphericalangle A + \sphericalangle C) = 180° - (66° + 42°) = 71°$ (unghiurile din paranteză sînt ambele puțin mai mari decît valorile scrise...)*.

Vom rezolva însă prima parte a problemei și în cazul general, cu date literale; se va vedea cum rezultatul ce-l vom obține va fi esențial în special pentru problema 3.

* Puteam determina pe BD și ca $AB \sin A$, iar pe C și din $\cos C = \frac{CD}{BC} = \frac{5}{\sqrt{46}}$.

Va trebui să deosebim două cazuri.

Cazul 1. Unghiul cuprins este ascuțit (fig. I. 61).

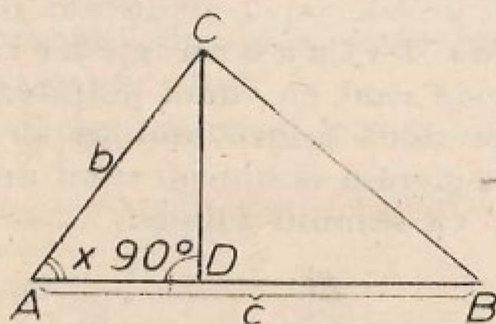


Fig. I.61

Ipoteza

$AB = c,\ AC = b,\ b \leqslant c,\ \sphericalangle A = x.$

Concluzia

$BC = \ldots,$

Rezolvare. Rolurile ce le joacă $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$ în enunț sînt simetrice, de aceea am precizat că $b \leqslant c$, pentru a ști că $\sphericalangle B \leqslant \sphericalangle C$, deci că $\sphericalangle B$ este ascuțit și că figura arată așa cum a fost desenată. Vom proceda la fel ca în cazul concret de mai sus: vom considera piciorul D al perpendicularei din C pe AB, care, datorită ipotezelor, se va afla între A și B.

În $\triangle ACD$ avem $CD = b \sin x$, $AD = b\cos x$; apoi $BD = c - b\cos x$. Teorema lui Pitagora în $\triangle BDC$ dă $BC = \sqrt{BD^2 + DC^2} = \sqrt{b^2\sin^2 x + (c - b\cos x)^2} = \sqrt{b^2(\sin^2 x + \cos^2 x) + c^2 - 2bc \cos x} = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos x}.$

Cazul 2. Unghiul cuprins este obtuz.

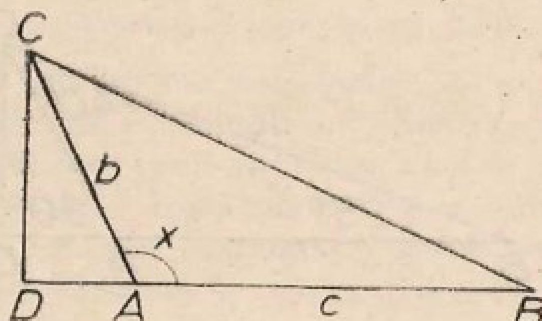


Fig. I.62

Ipoteza

$AB = c,\ AC = b,\ \sphericalangle A = x$

Concluzia

$BC = \ldots,$

Rezolvare. În acest caz $\sphericalangle B$ este sigur ascuțit. Avem $\sphericalangle CAD = 180° - x$ și în continuare procedăm în același mod ca în cazul 1: $AD = b\cos(180° - x)$, $CD = b\sin(180° - x)$, $BD = c + b\cos(180° - x)$, $BC = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{b^2\sin^2(180° - x) + (c + b\cos(180° - x))^2} = \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos(180° - x)}$ și apoi $\sin B = \frac{CD}{CB}$.

Observație. Dacă examinăm cele două formule obținute în cele două cazuri pentru lungimea lui BC observăm că, dacă definim, pentru $90° < x < 180°$, $\cos x$ drept $-\cos(180° - x)$, atunci formula de la cazul 1 este vala-

bilă și în cazul 2. Dacă definim și $\cos 90° = 0$, atunci formula de la cazul 1 va fi valabilă și pentru $\sphericalangle A = 90°$, devenind teorema lui Pitagora.

Din rezolvarea problemei 1 deducem deci.

Teorema lui Pitagora generalizată. În orice triunghi, pătratul unei laturi este egal cu suma pătratelor celorlalte două laturi minus dublul produs al celor două laturi înmulțit cu cosinusul unghiului format de ele, convenind să considerăm cosinusul unui unghi obtuz ca fiind egal cu cosinusul suplementului, cu semnul minus.

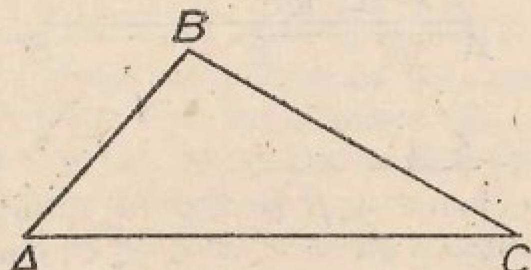


Fig. I.63

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$; $\cos x = -\cos(180° - x)$, $\cos 90° = 0$.

Această teoremă se numește teorema lui Pitagora „generalizată" deoarece teorema lui Pitagora este un caz particular al ei, pentru $\sphericalangle A = 90°$.

Problemă rezolvată 2. Cunoscînd măsurile a două unghiuri ale unui triunghi și lungimea laturii cuprinse între ele, să se determine lungimile celorlalte două laturi (și măsura celui de-al treilea unghi).

Vom considera un caz concret (fig. I. 64).

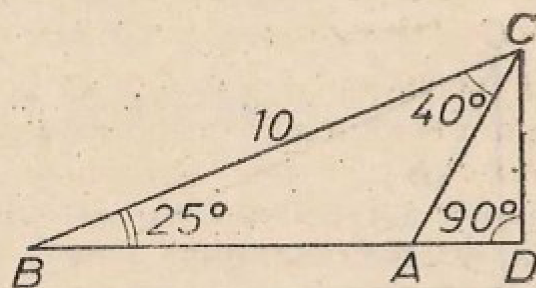


Fig. I.64

Ipoteza	*Concluzia*
$BC = 10$, $\sphericalangle B = 25°$, $\sphericalangle C = 40°$	$AB = ...$, $AC = ...$ $\sphericalangle A = ...$

Rezolvare. Evident $\sphericalangle A = 180° - (25° + 40°) = 115°$. Vom considera, ca în problema precedentă, piciorul D al perpendicularei din C pe AB. Avem $CD = BC \sin B = 10 \cdot 0{,}423 = 4{,}23$, iar $\sphericalangle CAD = 65°$, $AC = \frac{CD}{\sin CAD} = \frac{4{,}23}{0{,}906} = 4{,}66...$ Calculul lui AB se face asemănător, ducînd perpendiculara din B pe AC: $AB = \frac{BC \sin C}{\sin(180° - A)} = \frac{10 \cdot 0{,}643}{0{,}906} = 7{,}09...$.

Observație. Dacă vom conveni să considerăm că $\sin 90° = 1$ și că, pentru $90° < x < 180°$, $\sin x = \sin(180° - x)$, atunci în figura I.64, de exem-

plu, am putea scrie direct $CD = AC\sin A$ și deci $AC = \frac{BC \sin B}{\sin A}$ ar fi o formulă valabilă în toate cazurile (chiar cînd $\sphericalangle B$ ar fi obtuz).

Problemă rezolvată 3. Cunoscînd lungimile celor trei laturi ale unui triunghi, să se afle măsurile unghiurilor sale.

Vom considera, ca mai înainte, un caz concret (fig. I.65).

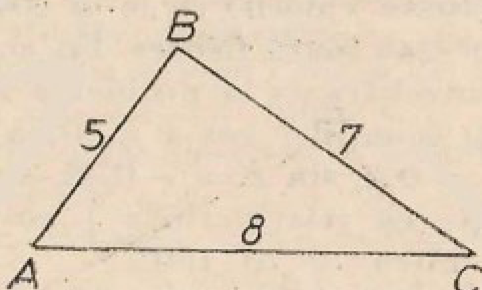


Fig. I.65

Ipoteza	*Concluzia*
$AB = 5,\ BC = 7,\ AC = 8$	$\sphericalangle A = \ldots,\ \sphericalangle B = \ldots,\ \sphericalangle C = \ldots$

Rezolvarea este simplă, pe baza teoremei lui Pitagora generalizate. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC\cos A$, deci $49 = 25 + 64 - 80\cos A$; $\cos A = \frac{1}{2}$, $\sphericalangle A = 60°$. Asemănător obținem $64 = 49 + 25 - 70\cos B$, $\cos B = \frac{1}{7} = 0{,}142\ldots$, $\sphericalangle B = 81°\ldots$", și $25 = 49 + 64 - 112\cos C$, $\cos C = \frac{11}{14} = 0{,}785\ldots$, $\sphericalangle C = 38°\ldots$ Bineînțeles că ultimul unghi putea fi dedus din celelalte două — suma unghiurilor triunghiului fiind $180°$.

Observație. Uneori, cînd atît datele problemei, cît și ceea ce se cere calculat, se referă numai la lungimi de segmente, este avantajos să nu mai antrenăm și unghiuri în calculele noastre și să enunțăm teorema lui Pitagora generalizată astfel: *pătratul unei laturi a unui triunghi este egal cu suma pătratelor celorlalte două plus sau minus, după cum unghiul opus este obtuz sau ascuțit, produsul dintre una din celelalte două și proiecția celeilalte pe ea.*

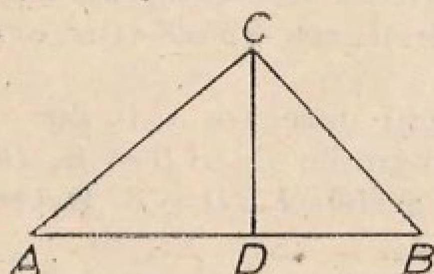
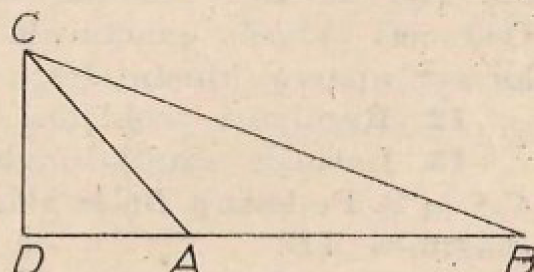


Fig. I.66



$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AD \qquad BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AD$

$AD = \pm AC\cos A$

De exemplu, dacă în situația din problema rezolvată 3 am dori să calculăm înălțimea din B a triunghiului, am calcula întîi distanța AD de la A

la piciorul înălțimii prin formula de mai sus și am găsi $AD = \frac{5}{2}$, iar apoi din teorema lui Pitagora am deduce $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

8. Probleme

1. Care sînt toate valorile ce le ia cos x, cînd x variază de la 0° la 180°? De cîte ori este luată fiecare din aceste valori?

2. Aceleași întrebări ca la problema 1 pentru sin x.

3. „Rezolvați ecuațiile" $\cos x = 0{,}75$ $\cos x = -0{,}39$, $\cos x = 1{,}6$, precum și $\sin x = 0{,}4$, $\sin x = -0{,}34$, $\sin x = 2$.

4. Să se arate că relația $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ este adevărată pentru orice x cuprins între 0° și 180°.

5. Exprimați, pentru $0° < x < 90°$, $\sin(90° + x)$ și $\cos(90° + x)$ în funcție de sin x, cos x.

6. Este adevărat că $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ pentru orice x între 0° și 180°? Dar $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$?

7. În problema rezolvată 2, figura 1.64, determinați lungimea AB fără a mai duce perpendiculara din B pe AC.

8. Un triunghi are unghiurile de 60°, 45°, și 75° iar latura dintre unghiurile de 75° și 45° de 4 cm.

a. Determinați lungimile celorlalte laturi.

b. Folosind și metoda găsită în problema, 7 deduceți o expresie exactă pentru sin 75° și cos 75°.

9. Cele trei laturi ale unui triunghi au lungimile de 10, 12 și 8.

c. Calculați lungimile medianelor acestui triunghi.

b. Calculați unghiurile dintre mediane și laturile corespunzătoare.

10. Un triunghi are două laturi de 8 și 11, iar unghiul cuprins între ele de 60°. Calculați lungimea celei de a treia laturi și măsurile celorlalte două unghiuri.

11. Un triunghi isoscel are laturile congruente de 8, iar unghiul din vîrf de 45°. Calculați baza sa, înălțimea corespunzătoare bazei. Deduceți valorile exacte ale lui sin 22°30′ și cos 22°30′ (în expresiile lor vor apărea, bineînțeles, radicali).

12. Rezolvați problema 11 cu un unghi oarecare x în loc de 45°.

13. Laturile unui triunghi ABC au lungimile de $AB = 6$, $BC = 7$, $CA = 8$. Pe latura BC se alege un punct D astfel ca $BD = 3$. Determinați lungimea AD.

14. Un triunghi are o latură de 12, unghiul opus de 56°, iar unul din celelalte unghiuri de 62°. Determinați raza cercului circumscris triunghiului.

15. În problema precedentă, determinați și raza cercului înscris în triunghi.

16. Două laturi ale unui triunghi au lungimile de 9 şi 14, unghiul cuprins între ele este de 40°. Calculaţi lungimea bisectoarei corespunzătoare laturii de 9.

17. Laturile unui paralelogram au lungimile de 5 şi 8, iar unul din unghiurile sale are 50°.

a. Calculaţi lungimile diagonalelor.

b. Calculaţi unghiurile dintre diagonale şi laturi.

c. Calculaţi unghiul dintre diagonale.

18. Distanţa dintre centrele a două cercuri de raze 9 şi 13 este de 20.

a. Calculaţi lungimea coardei lor comune.

b. Calculaţi unghiul dintre tangentele la cele două cercuri într-unul din punctele lor de intersecţie.

19. Aceeaşi problemă, distanţa dintre centre fiind de 5.

20. Bazele unui trapez au 15 respectiv 9 ca lungimi, iar laturile neparalele au 11 şi 13.

a. Cum arată trapezul, aşa  sau aşa  ?

(Cu alte cuvinte: unghiurile ascuţite ale trapezului sînt alăturate sau opuse.)

b. Calculaţi lungimile diagonalelor trapezului.

c. Calculaţi unghiurile trapezului.

d. Calculaţi unghiurile dintre diagonale şi laturi.

e. Calculaţi unghiul dintre diagonale.

Încercaţi să rezolvaţi fiecare din puncte bazîndu-vă pe cît mai puţine din rezultatele punctelor precedente.

21. Bazele unui trapez sînt lungi de 16 şi 4, una din laturile neparalele are 6, iar una din diagonale 12. Rezolvaţi pentru acest trapez punctele a-e din problema precedentă.

22. Din două puncte ale unei drepte depărtate între ele cu 4, ducem două segmente perpendiculare pe acea dreaptă, de lungimi 5 şi 7. Care este distanţa dintre celelalte capete ale acestor segmente.

23. Într-un patrulater convex $ABCD$ avem $AB = 13$, $BC = 25$, $CD = 26$, $DA \hat{=} 12\sqrt{2}$, iar $BD = 17$. Calculaţi lungimea diagonalei AC.

24. În problema 23 calculaţi şi unghiurile patrulaterului, unghiurile dintre diagonale şi laturi, unghiul dintre diagonale.

25. În problemele 23—24, punctul D este în interiorul, în exteriorul sau chiar pe cercul ce trece prin A, B, C?

Aplicaţii practice

Reamintiţi-vă aplicaţia pratică de la pag. 26 şi rezolvaţi din nou problemele respective, fără a mai măsura nimic pe hîrtie.

Întrebări. Cu ce se ușurează munca elevului din figura I.34 dacă el are la dispoziție tabelul de la pag 46?

Cum puteți afla, fără a trece rîul, dacă aparatul meteorologic din figura I.67 este văzut de observatorul din punctul O?

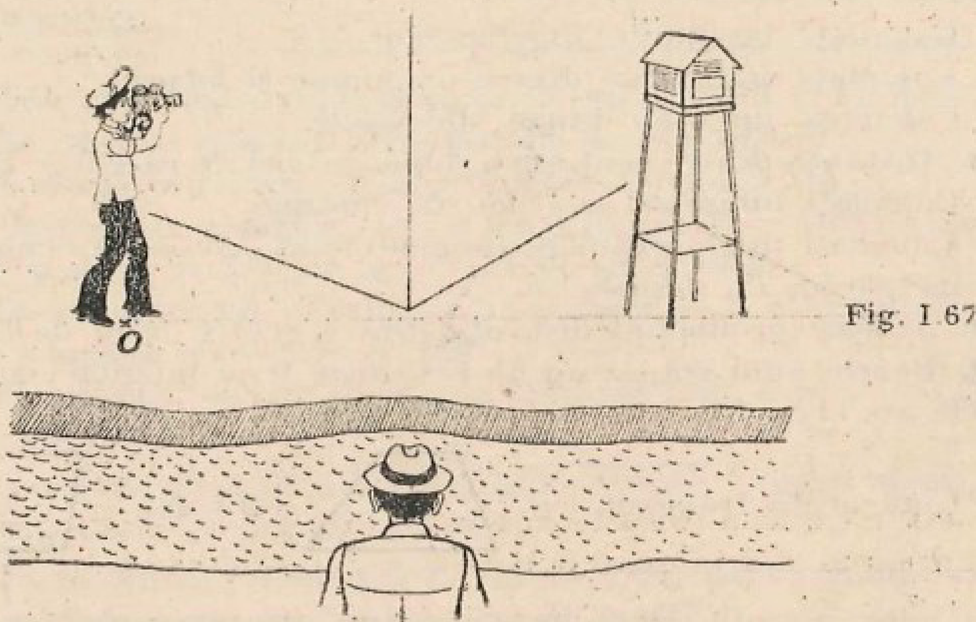


Fig. I.67

CÎTEVA TEOREME ÎN PLUS (FACULTATIV)

În problema 17 de la pag. 13 s-a cerut să se demonstreze:

Teorema bisectoarei. Bisectoarele interioară și exterioară, a unui unghi dintr-un triunghi, împart latura opusă într-un raport, egal cu raportul laturilor ce formează unghiul (fig. I.68)

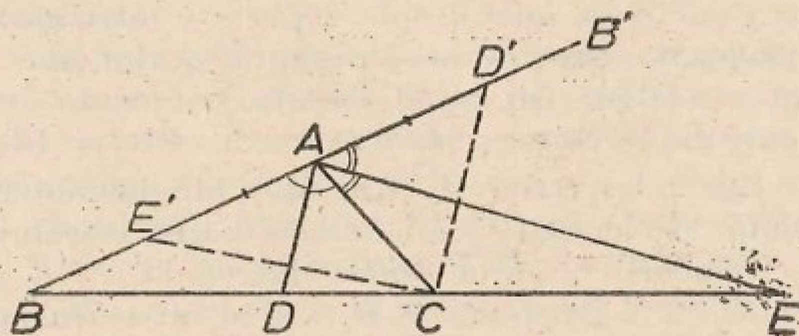


Fig. I.68

Ipoteza

$\measuredangle DAB \equiv \measuredangle DAC$, $\measuredangle EAB' \equiv \measuredangle EAC$

Concluzia

$$\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$$

Demonstrația o vom schița numai. Alegem pe dreapta AB punctele D', E' așa încît $AD' \equiv AE' \equiv AC$, D' fiind pe semidreapta AB' iar E' pe

semidreapta AB. Se arată că $CD' \| AD$, $CE' \| AE$ și se aplică teorema lui Thales în $\triangle BD'C$ tăiat de AD și în $\triangle BAE$ tăiat de CE' etc.

Pe baza teoremei bisectoarei vom rezolva:

Problemă. Fiind date două puncte A, B și un număr k diferit de 1, să se afle locul geometric al tuturor punctelor M pentru care $\frac{MA}{MB} = k$ (fig. I.69).

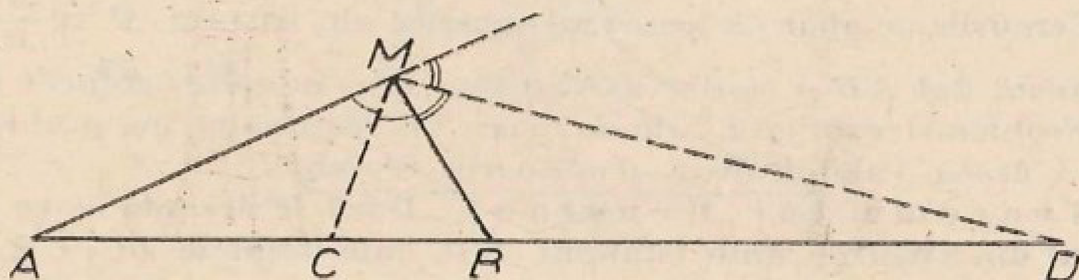


Fig. I.69

Ipoteza

$\frac{MA}{MB} = k$

Rezolvare. Să ducem bisectoarea interioară și cea exterioară a $\measuredangle AMB$. Ele vor tăia dreapta AB în două puncte C și D astfel încît, conform teoremei bisectoarei, $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = k$. Deci punctele C și D sînt fixe, nu depind de M, ci doar de A, B și k (vezi problemele 4 și 5 de la pag 12). Avem și $MC \perp MD$..., deci M se află pe cercul de diametru CD.

Pentru a rezolva complet problema, urmează să demonstrăm că orice punct M de pe cercul de diametru CD are proprietatea $\frac{MA}{MB} = k$ (scrieți ipoteza și concluzia acestei părți a rezolvării). Această demonstrație întîmpină greutăți mai mari decît ne așteptăm. Vom proceda prin următoarea metodă. Vom alege un punct M pe cercul de diametru CD, vom considera dreapta CM și simetricul B' al lui B față de CM (fig. I.70).

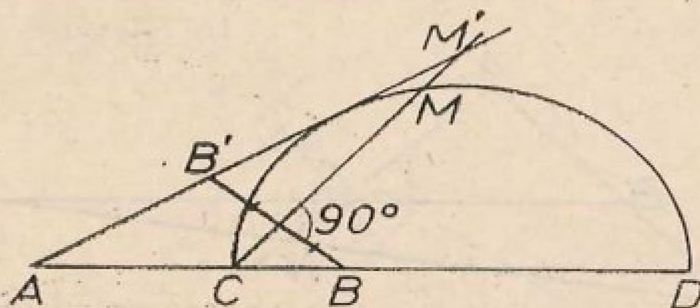


Fig. I.70

Despre punctele C și D știm că au proprietatea ce trebuie stabilită, deci presupunem că M este diferit de aceste puncte. Rezultă că CM nu este perpendiculară pe AB, deci B' nu se află pe AB și dreapta AB' taie dreapta CM într-un punct M' (acest ultim fapt rezultă din $BC \not\equiv CA$, deci $AB' \nparallel CM$). Rezultă ușor că $M'C$ este bisectoarea $\measuredangle AM'B$, deci (teorema bisectoarei) $\frac{M'A}{M'B} = \frac{CA}{CB} = k$.

Conform primei părţi a rezolvării, M' se va afla pe cercul de diametru CD. Dar dreapta CM nu poate avea mai mult de două puncte comune cu acest cerc, deci $M' = M$ şi $\frac{MA}{MB} = k$, q.e.d.

Observaţie. Pentru $k = 1$, locul geometric din problemă este mediatoarea segmentului AB.

Cercurile ce apar ca locuri geometrice ale tuturor M cu $\frac{MA}{MB} = k$, pentru un segment dat AB şi pentru diverşi $k \neq 1$, se numesc cercurile lui Apollonios.

Problema rezolvată 2 de la pag. 11, împreună cu problema 18 de la pag. 13 arată valabilitatea următoarei teoreme.

Teorema lui Menelaos. Dacă o dreaptă d ce nu trece prin niciunul din vîrfurile unui triunghi ABC taie dreptele BC, CA, AB respectiv în M, N, P, atunci $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = +1$.

Convenim, la fel ca în cazul puterii unui punct faţă de un cerc, să considerăm că $\frac{MB}{MC}$ este negativ dacă M se află în interiorul segmentului BC şi pozitiv dacă M se află pe dreapta BC, dar nu în interiorul segmentului BC. Valoarea $+1$ din enunţul teoremei spune că sînt două posibilităţi: două din punctele M, N, P sînt în interioarele segmentelor respective iar al treilea nu (fig. I.71) sau niciunul dintre cele trei puncte nu se află în interiorul segmentului respectiv (fig. I.72).

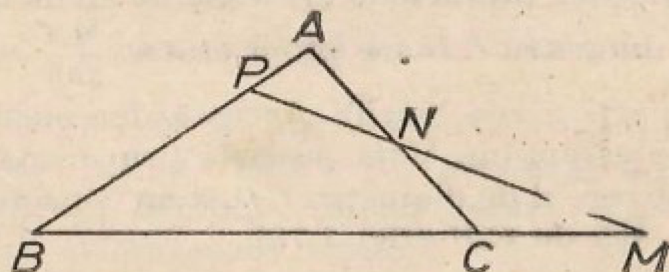


Fig. I.71

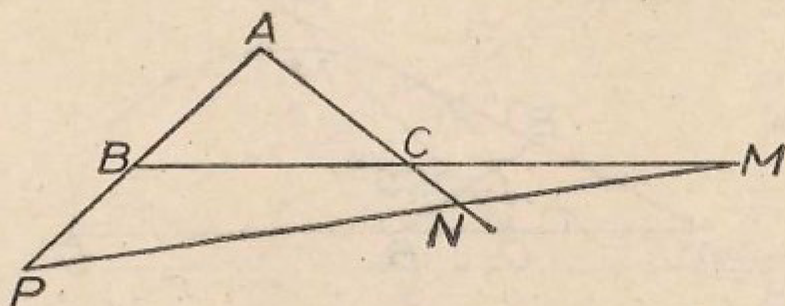


Fig. I.72

Această teoremă ne dă posibilitatea să imaginăm o metodă de a demonstra că trei puncte sînt coliniare.

Următoarea teoremă ne oferă o metodă de a demonstra că trei drepte sînt concurente.

Teorema lui Ceva. Dacă D este un punct nesituat pe niciuna din dreptele AB, BC, CA, unde ABC este un triunghi, şi dacă M, N, P sînt

punctele de intersecție respective ale lui AD cu BC, lui BD cu CA și CD cu AB, atunci avem $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = -1$ (unde facem convenția de mai sus cu privire la semnele rapoartelor ce apar) (fig. I. 73).

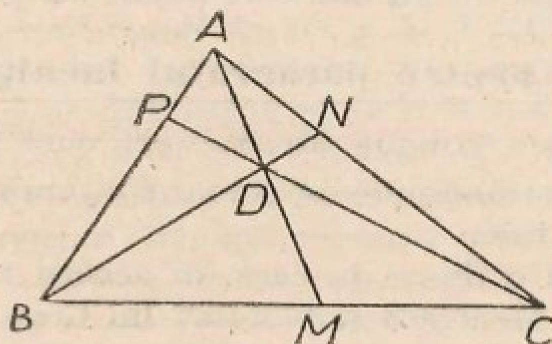


Fig. I.73

(Se poate întîmpla ca figura să arate altfel: numai unul din punctele M, N, P să se afle în interiorul segmentului respectiv).

Demonstrație. Teorema lui Menelaos în $\triangle ABM$ tăiat de PDC dă $\frac{PA}{PB} \frac{CB}{CM} \cdot \frac{DM}{DA} = +1$, iar aceeași teoremă în $\triangle ACM$ tăiat de NDB dă $\frac{NC}{NA} \cdot \frac{DA}{DM} \cdot \frac{BM}{BC} = +1$.

Să înmulțim, membru cu membru, cele două egalități. În dreapta obținem evident $+1$, iar în stînga $\frac{DM}{DA} \cdot \frac{DA}{DM}$ este $+1$, $\frac{BM}{CM} = \frac{BM}{MC}$, iar $\frac{CB}{BC} = -1$. Se ajunge imediat la relația dorită; mai mult , modul de redactare al demonstrației nu este influențat cu nimic de înlocuirea figurii I.73 cu o figură descrisă „în paranteza de după figura I.73“ q.e.d.

Să dăm și „rezultatul“ problemei 13 de la pag. 52 rezolvată cu date literale împreună cu demonstrația sa.

Teorema lui Stewart. Dacă M este un punct în interiorul laturii BC a unui triunghi ABC, atunci $AM^2 \cdot BC = AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot BM - BC \cdot BM \cdot MC$ (fig. I. 74).

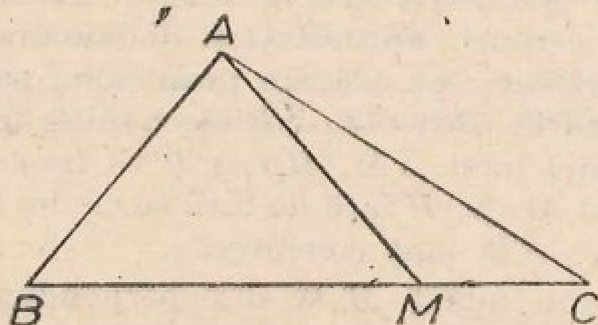


Fig. I.74

Demonstrație. Teorema lui Pitagora generalizată în ΔABM, ΔABC, dă $AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos B$,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B$.

Eliminăm pe $\cos B$ înmulțind prima relație cu BC, și scăzînd din ea pe a doua, înmulțită în prealabil cu BM. Relația ce se obține se scrie, după ce trecem termenul $AC^2 \cdot BM$ în membrul doi:

$$AM^2 \cdot BC = AB^2(BC - BM) + AC^2 \cdot BM - BC \cdot BM(BC - BM)$$

de unde pînă la relația dorită mai este numai un pas: $BC - BM = MC$.

9. Probleme pentru paragraful facultativ

1. Ce devine teorema lui Stewart cînd M este mijlocul lui BC?*

2. Calculați lungimile bisectoarelor unui triunghi cunoscînd lungimile laturilor sale.

3. Desenați o figură în care, în același triunghi, să se poată aplica și teorema lui Menelaos și teorema lui Ceva, două din cele trei puncte fiind aceleași în ambele aplicații. Enunțați rezultatul obținut.

4. Enunțați și demonstrați reciproca teoremei lui Menelaos.

5. Aceeași problemă pentru teorema lui Ceva.

6. Se consideră trei cercuri, ce n-au centrele coliniare, și astfel încît printre ele să nu existe două care să fie interioare sau tangente interioare, (C_1), (C_2), (C_3). Tangentele comune exterioare ale lui (C_1) și (C_2) se întîlnesc în A_{12}; definim asemănător punctele A_{23}, A_{31}. Să se arate că cele trei puncte sînt coliniare.

7. Enunțați o problemă asemănătoare cu problema 6, în care să fie vorba și de tangente comune interioare.

8. Cercul înscris în triunghiul ABC atinge laturile BC, CA, AB în M, N, P respectiv. Demonstrați că AM, BN, CP sînt concurente.

9. Enunțați o problemă asemănătoare cu problema 8 în care să fie vorba de un cerc tangent celor trei laturi ale unui triunghi, altul decît cel înscris.

10. Care este locul geometric al punctelor pentru care diferența pătratelor distanțelor la două puncte date să fie constantă?

11. Care este locul geometric al punctelor ce au puteri egale față de două cercuri date?

12. Locul geometric din problema 11 se numește „axa radicală" a celor două cercuri. Formulați și demonstrați o teoremă care să aibă drept caz particular pe cea din problema 5pag. 33.

13. Pe laturile BC, CA, AB ale unui triunghi se consideră punctele M, N, P astfel încît AM, BN, CP să fie concurente. Fie M', N', P' simetricele lui M, N, P față de mijloacele lui BC, CA, AB. Demonstrați că AM', BN', CP' sînt concurente.

14. Dintr-un punct M se duc perpendiculare pe laturile BC, CA, AB ale unui triunghi; fie D, E, F picioarele lor. Să se demonstreze că $BD^2 + CE^2 + AF^2 = CD^2 + AE^2 + BF^2$. Enunțați și demonstrați o reciprocă.

---

* Rezultatul se numește „teorema medianei".

15. Determinați locul geometric al punctelor pentru care suma pătratelor distanțelor la două puncte date A și B este constantă.

16. Se consideră un punct A și o dreaptă d ce nu trece prin el. Fie d' paralela la d ce trece prin mijlocul segmentului cu capetele în A și în piciorul perpendicularei a din A pe d. Să se demonstreze că locul geometric al punctelor egal depărtate de A și d este tot una cu locul geometric al punctelor pentru care distanța la a este medie proporțională între distanța la d' și dublul distanței de la A la d.

17. Într-un triunghi se cunosc două laturi a, b și unghiul B opus uneia din ele. Determinați cea de a treia latură și celelalte două unghiuri. *Discuție*: în ce cazuri avem o soluție, în ce cazuri două și în ce cazuri niciuna?

Observație. În paragraful dinainte am învățat să rezolvăm toate cele trei probleme ce ni le-am pus anul trecut cu oazia construirii triunghiurilor. Anume: cunoscînd trei din elementele unui triunghi (nu toate unghiuri), să calculăm celelalte trei. Din problemele ce le-ați rezolvat, ați învățat să calculați lungimi și unghiuri ce apar în paralelograme, trapeze, patrulatere oarecare, crcuri.

Aplicațiile practice ale geometriei ne pun tocmai astfel de probleme.

În acest paragraf ați luat cunoștință de posibilități de a continua dezvoltarea geometriei în stilul în care v-am prezentat-o. Ați văzut că se mai pot demonstra teoreme interesante, frumoase, asupra figurilor ce le cunoaștem; astfel de teoreme sînt încă multe. Enunțurile lor nu se complică mereu. Ce simplu este enunțul problemei 8, și ce dificilă, dacă nu imposibilă, apare soluția ei dacă n-am cunoaște teorema lui Ceva. Avem astfel o idee asupra resurselor de care dispune mintea noastră în acțiunea ei de cunoaștere a lumii.

În clasa a IX-a, la „Geometrie plană", veți relua cunoștințele căpătate în clasele VI—VII la un niel mai înalt de rigurozitate și veți face cunoștință și cu alte teoreme de geometrie.

Atunci veți stăpîni mai bine decît acum calculul algebric și veți putea rezolva ecuații de gradul 2, ceea ce vă va permite să tratați multe din problemele ce le-ați rezolvat pînă acum cu date literale.

În clasa a VIII-a veți folosi cunoștințele din clasele VI—VII pentru studiul figurilor în spațiu și pentru calculul elementelor lor.

CAPITOLUL 2

ARII

INTRODUCERE

Noțiunea de arie era bine cunoscută, încă dinainte de a fi început, în clasa a VI-a, studiul geometriei. Astfel, în figura II.1, intuiția ne îndeamnă să spunem că aria ABC este mai mare decît aria DEF, în ciuda faptului că DEF este mai „lungă“ decît ABC. Există o situație geometrică în care ariile se adună, asemănătoare cu cele în care se adună lungimile segmentelor sau măsurile unghiurilor: în fig. II.1 avem aria $GHIJK$ = aria GHI + aria GIK + aria IJK.

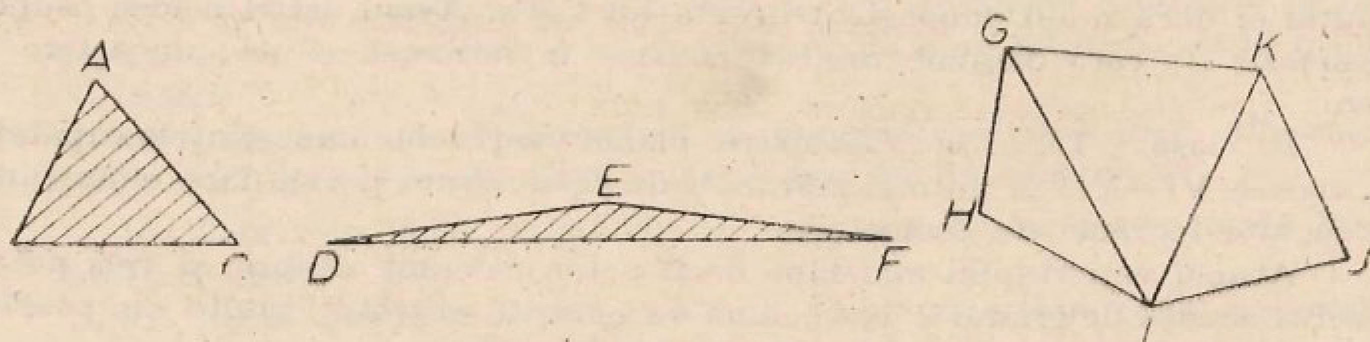


Fig. II.1

Dar noi nu am luat în considerare noțiunea de arie cînd am descris, în partea I-a manualului de clasa a VI-a, noțiunile de bază ale geometriei plane. Este cazul să privim aceasta ca o lipsă? Nu, deoarece astfel de noțiuni, sugerate de experiența noastră și nu de logica dezvoltării geometriei, mai pot apărea și chiar vor apărea în capitolul 3.

Ne aflăm deci în fața unei situații noi. Intuiția noastră pune în evidență o noțiune nouă și unele proprietăți ale ei. Noi „simțim“ că aceasta este o noțiune de geometrie. Se pune problema să exprimăm toate acestea în limbajul geometriei noastre, cu alte cuvinte să definim această noțiune și să demonstrăm proprietățile descoperite de noi înainte.

Cum în clasele precedente ați mai învățat cum se calculează ariile, noi vom merge aci „drept la țintă", fără a ignora cunoștințele de pînă acum asupra ariilor (evident însă, fără a ne baza pe ele în demonstrații).

Observație. Cînd vorbim de aria unui triunghi, ne gîndim de fapt nu la aria figurii formată de vîrfurile triunghiului, ci la aria „interiorului triunghiului", înțeles drept mulțime a tuturor punctelor care se află de aceeași parte a oricăreia din laturile triunghiului ca și vîrful opus (fig. II.2).

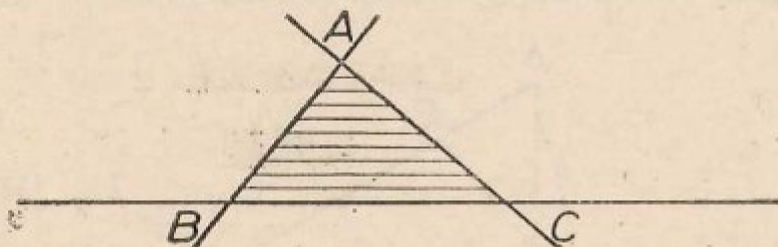


Fig. II.2

Dacă privim schema triunghi → interiorul său → aria, observăm că fiecărui triunghi, chiar gîndit ca o figură formată numai din trei puncte (vîrfurile) îi corespunde o arie. Un astfel de mod de a gîndi scurtează expunerea, evitînd repetarea inutilă a cuvîntului „interior".

Aria unui triunghi

D e f i n i ț i e. Prin aria unui triunghi înțelegem jumătate din produsul dintre o latură a triunghiului și înălțimea corespunzătoare acelei laturi. Cu alte cuvinte aria unui triunghi este egală cu jumătate din produsul dintre „bază" și „înălțime").

Aria triunghiului ABC o vom nota S_{ABC}.

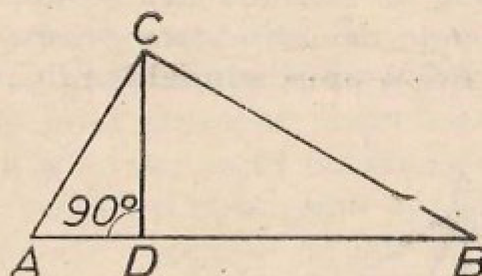


Fig. II.3

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot CD}{2}$$

Avem trei posibilități de a calcula aria unui triunghi dat, corespunzătoare celor trei laturi ale sale, și nu știm dinainte că toate trei conduc la același rezultat. Ar fi trebuit deci să demonstrăm, înainte de a da definiția de mai sus, o teoremă, al cărei enunț îl puteți ușor deduce (vezi chiar problema 9 pag. 24.

Teorema asupra puterii punctului apăruse ca o teoremă importantă; din ea am dedus teorema lui Pitagora. Teorema ce va trebui s-o demonstrăm aici, deși „de neînlocuit" în acest paragraf, nu apare ca o teoremă atît de

importantă în alte capitole încît să merite să fie pusă în rînd cu teorema lui Thales, cu cea a lui Pitagora etc... O astfel de teoremă se numește „lemă": deci prin lemă vom înțelege tot o teoremă, însă care are numai un rol ajutător.

Istoria matematicii cunoaște însă exemple în care o „umilă lemă" a sfîrșit prin a deveni mai celebră decît teoreme demonstrate pe baza ei.

L e m ă. Într-un triunghi, produsul dintre o latură și înălțimea corespunzătoare ei este același pentru toate cele trei laturi (altfel spus, definiția precedentă este corectă).

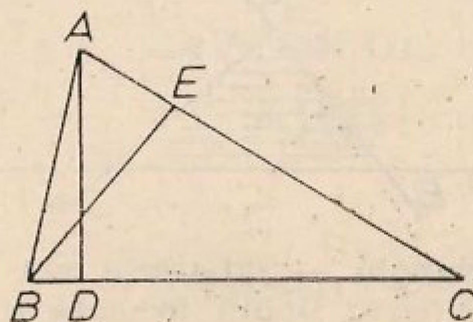


Fig. II.4

Ipoteza

$AD \perp BC$, $BE \perp AC$ (fig. II.4)

Concluzia

$AD \cdot BC = BE \cdot AC$

Demonstrație. $\triangle ACD \sim \triangle BCE$, conform cazului 2 de asemănare, deoarece $\sphericalangle ADC = 90° = \sphericalangle BEC$ și $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C$. Rezultă $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BE}$, de unde obținem, scriind că produsul mezilor este egal cu al extremilor, relația din concluzie.

Observație. Aria unui triunghi depinde de unitatea de măsură aleasă pentru lungimi. Dacă înlocuim această unitate cu alta, de k ori mai lungă decît prima, atunci lungimile tuturor segmentelor se împart cu k, iar toate ariile triunghiurilor devin de k^2 ori mai mici.

În introducere am vorbit de o situație în care ariile se adună. Un prim fapt de acest fel este stabilit în teorema următoare.

T e o r e m ă *(proprietate de aditivitate pentru arii).* **Dacă D este un punct din interiorul laturii BC a unui triunghi ABC, atunci $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$** (fig. II.5).

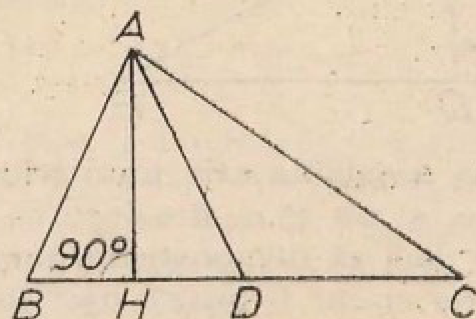


Fig. II.5

Demonstrație. Să considerăm înălțimea AH. Avem $S_{ABC} = \frac{BC \cdot AH}{2} = \frac{(BD + DC)AH}{2} = \frac{BD \cdot AH}{2} + \frac{DC \cdot AH}{2} = S_{ABD} + S_{ACD}$, q.e.d.

Observație. Enunțul „proprietății generale de aditivitate" este complicat și nu-l vom da. În problemele 6, 7 de mai jos, vom indica alte expresii ale acestei proprietăți; în paragraful următor vor apărea de asemenea alte proprietăți cărora li se potrivește acest titlu.

În încheierea acestui paragraf, să arătăm cum teoremele demonstrate aici, deși simple, permit scurtarea rezolvărilor unor probleme.

Problemă rezolvată. Să se demonstreze că suma distanțelor unui punct din interiorul bazei unui triunghi isoscel la cele două laturi congruente este constantă.

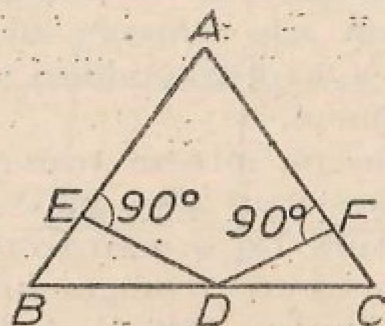


Fig. II.6

Ipoteza — *Concluzia*

$DE \perp AB$, $DF \perp AC$, $AB \equiv AC$ — $DE + DF = ...$ (constant).

Demonstrație. Aceasta este una din problemele „de cl. VI-a". Acum putem face demonstrația astfel. Să scriem, conform teoremei de aditivitate, $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$, deci $S_{ABC} = \frac{AB \cdot DE}{2} + \frac{AC \cdot DF}{2} = \frac{AB(DE + DF)}{2}$. Obținem $DE + DF = \frac{2S_{ABC}}{AB}$, deci este aceeași pentru toate pozițiile lui D în interiorul segmentului BC.

10. Probleme*

1. Exprimați aria unui triunghi dreptunghic.

2. Care este aria unui triunghi dreptunghic isoscel de catetă a?

2. Care este aria unui triunghi echilateral de latură a?

4. Cunoscînd două laturi și unghiul cuprins între ele, exprimați aria unui triunghi. Care este raportul ariilor a două triunghiuri ce au un unghi congruent.

5. Calculați aria unui triunghi ale cărui laturi au lungimile sale 13, 20 și 21.

6. Pe laturile AB, AC ale unui triunghi se consideră punctele D, E. Arătați că $S_{ABC} = S_{ADE} + S_{BDE} + S_{BCE}$.

7. În interiorul unui triunghi ABC se consideră un punct M. Arătați că $S_{ABC} = S_{ABM} + S_{BCM} + S_{CAM}$.

8. Într-un paralelogram $ABCD$ avem $S_{ABC} = S_{DBC}$.

* Problemele 12 și 14 sînt facultative.

9. Raportul distanțelor de la mijlocul unei laturi a unui triunghi la celelalte două laturi este egal cu inversul raportului laturilor respective.

10. Demonstrați, prin arii, teorema bisectoarei (pag. 54).

11. Într-un triunghi ABC, simetrica medianei AD față de bisectoarea AE **taie** BC **în** F. **Determinați raportul** $\frac{FB}{FC}$.

12. Simetricele medianelor unui triunghi față de bisectoarele vîrfurilor respective sînt concurente.

13. Suma distanțelor unui punct din interiorul unui triunghi echilateral la laturile triunghiului este constantă.

14. Demonstrați, prin arii, teorema lui Ceva (pag. 56—57).

15. Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.

16. Raza cercului înscris într-un triunghi este cîtul dintre dublul ariei triunghiului și perimetrul acestuia.

17. O paralelă la latura BC a unui triunghi ABC taie laturile AB, AC în M, N. Să se arate că aria triunghiului ABN este medie proporțională între ariile triunghiurilor ABC și AMN.

18. Ariile a două triunghiuri congruente sînt egale.

19. Care este locul geometric al vîrfului A al unui triunghi ABC, ce are vîrfurile B, C fixe iar aria constantă?

ARIA UNUI PATRULATER

Înainte de a o defini, avem nevoie de o lemă, la fel ca în paragraful precedent. Anume:

Lemă. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Atunci $S_{ABC} + S_{ADC} = S_{BCD} + S_{ABD}$ (fig. II.7).

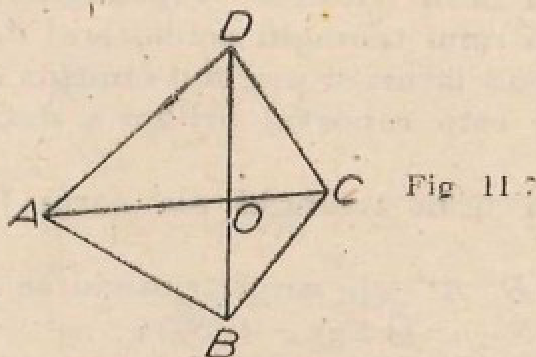


Fig. II.7

Demonstrație. Să notăm cu O intersecția diagonalelor patrulaterului. Conform proprietății de aditivitate avem $S_{ABC} + S_{ADC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{DOA} + S_{COD} = (S_{BOC} + S_{COD}) + (S_{AOB} + S_{DOA}) = S_{BCD} + S_{ABD}$, q.e.d.

D e f i n i ț i e. Prin aria unui patrulater convex $ABCD$ **înțelegem numărul** $S_{ABC} + S_{ADC}$ (vezi fig. II.7), **notat cu** S_{ABCD}.

Observație. Problema corectitudinii acestei definiții rezolvată prin lema precedentă, apare datorită faptului că am convenit să considerăm patrulaterul $ABCD$ drept, tot una cu $BCDA$ etc.

Înainte de a enunța teorema privind aria unui paralelogram, să reamintim că dacă avem două drepte paralele a și b, (fig. II.8), atunci distanța de la un punct A de pe a la dreapta b este aceeași pentru toate punctele $A \in a$; ea se numește „distanța de la a la b" și este tot una cu distanța de la b la a.

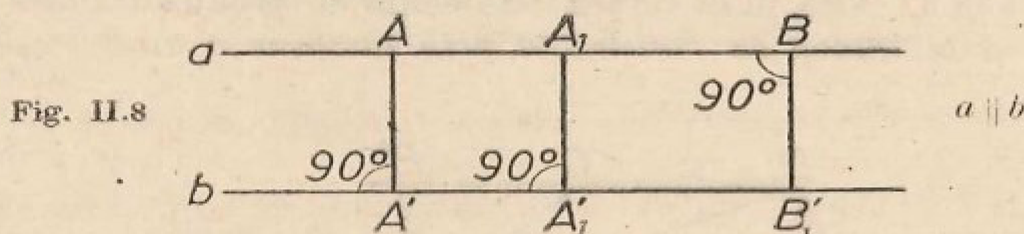


Fig. II.8

Vom numi înălțime corespunzătoare, unei laturi a unui paralelogram distanța între acea latură și latura opusă.

T e o r e m ă. Aria unui paralelogram este egală cu produsul dintre o latură a sa și înălțimea corespunzătoare.

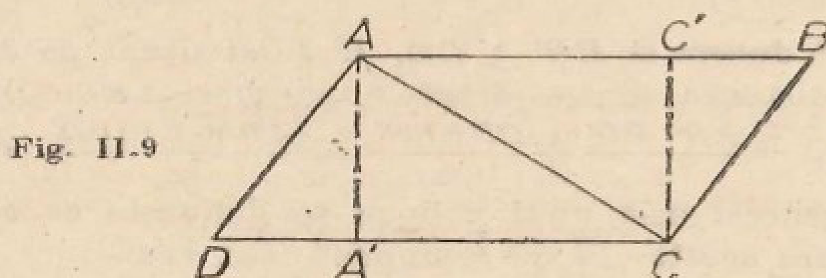


Fig. II.9

Ipoteza	*Concluzia*
$AB \parallel CD, AD \parallel BC$	$S_{ABCD} = CD \cdot AA'$
$AA' \perp CD, CC' \perp AB$	

Demonstrație. Avem $AA' \equiv CC'$ conform proprietăților distanței între dreptele paralelele AB, CD menționate mai sus și $AB \equiv CD$ (opus în paralelogram). Obținem $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} \frac{AB \cdot CC'}{2} + \frac{CD \cdot AA'}{2} = CD \cdot AA'$.

C o n s e c i n ț a 1. Aria unui dreptunghi este egală cu produsul dintre ungimea și lățime a sa.

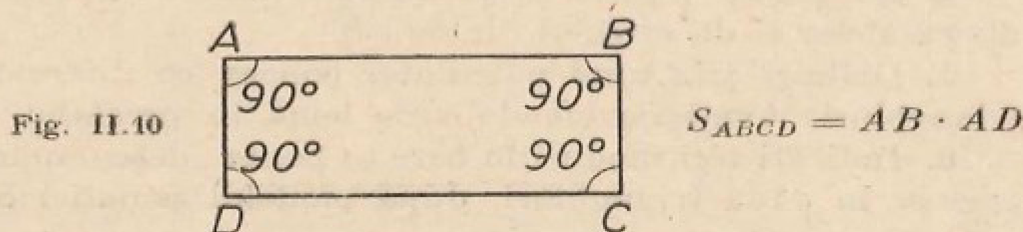
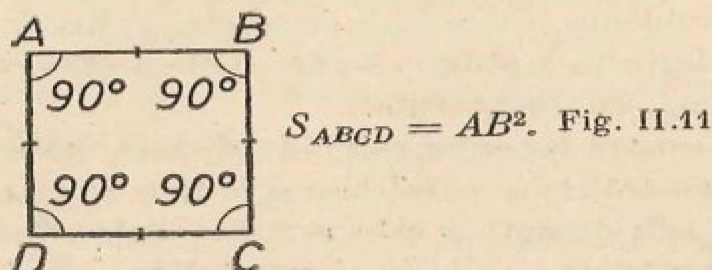


Fig. II.10

Consecința 2. Aria unui pătrat este egală cu pătratul lungimii laturii sale.



$S_{ABCD} = AB^2$. Fig. II.11

Teoremă. Aria unui trapez este egală cu produsul dintre semisuma bazelor sale și înălțimea sa *(înțelegînd prin înălțime a unui trapez distanța dintre baze)*.

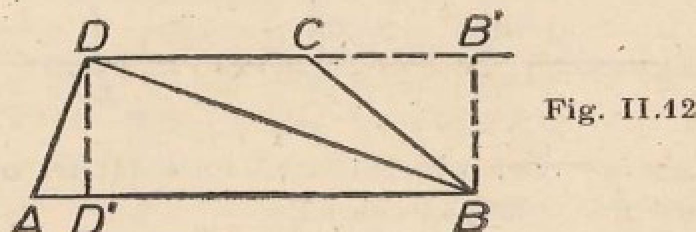


Fig. II.12

Ipoteză

$AB \parallel CD$, $DD' \perp AB$

Concluzie

$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} DD'$

Demonstrație. Să ducem și $BB' \perp CD$, B' fiind situat pe dreapta CD. Avem $BB' \equiv DD'$ (distanța dintre dreptele paralele AB, CD). Obținem $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{AB \cdot DD'}{2} + \frac{CD \cdot BB'}{2} = \frac{(AB + CD)DD'}{2}$ etc.

Observație. În general aria unui poligon se definește ca suma ariilor unor triunghiuri în care acesta „se descompune" (fig. II.13).

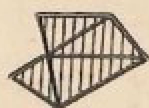


Fig. II.13

11. Probleme

1. Aria unui pătrat este de 5 cm^2. Care este lungimea laturii sale?

2. Exprimați aria unui romb în funcție de lungimile diagonalelor sale.

3. Cunoscînd lungimile celor două diagonale ale unui patrulater convex cu diagonalele perpendiculare, să se afle aria sa.

4. Exprimați aria unui patrulater convex în funcție de lungimile diagonalelor și de unghiul dintre ele.

5. Definiți aria unui patrulater concav ca diferența ariilor a două triunghiuri. Aveți nevoie de vreo lemă în prealabil?

6. Indicați trei moduri în care se poate „descompune" un patrulater concav în două triunghiuri, după modelul situației din definiția ariei

unui patrulater convex și demonstrați că în fiecare din aceste cazuri suma ariilor celor două triunghiuri este egală cu aria patrulaterului, definită în problema 5.

7. Fie $ABCD$ un patrulater convex, E un punct interior laturii AB. Arătați că $S_{ABCD} = S_{ADE} + S_{EBCD}$.

8. Fie $ABCD$ un patrulater convex, M și N două puncte interioare respectiv laturilor AB, CD. Arătați că $S_{ABCD} = S_{AMND} + S_{BMNC}$.

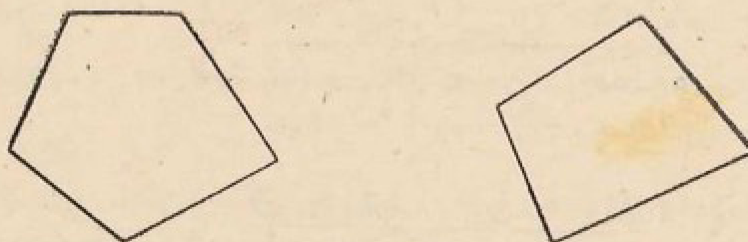
9. Fie M, N, P, Q puncte interioare laturilor AB, BC, CD, DA ale unui patrulater convex $ABCD$. Demonstrați că $S_{ABCD} = S_{MNPQ} + S_{BMN} + S_{CNP} + S_{DPQ} + S_{AQM}$.

10. Definiți aria unui pentagon convex; va trebui demonstrată în prealabil o lemă.

11. Cunoscînd lungimile laturilor unui patrulater convex, determinați aria sa.

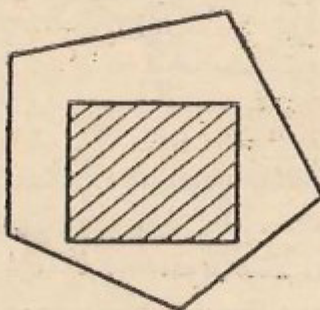
12. Aplicație practică. Ce trebuie măsurat pentru a determina ariile din figura II.14?

Fig. II.14



13. Cum faceți pentru a determina aria unui teren care are în interiorul său o clădire (este vorba de aria terenului „inclusiv" clădirea), clădire de o formă mai complicată?

Fig. II.15



14. Cum faceți pentru a determina aria unui teren în care un vîrf este inaccesibil?

Fig. II.16



Încercați să rezolvați probleme de tipul 12—14 efectiv pe teren.

15. Se consideră mijloacele M, N, P, Q ale laturilor AB, BC, CD, DA ale unui paralelogram. Dreptele AN, BP, CQ, DM determină un paralelogram. Care este raportul dintre aria acestui paralelogram și cea a celui inițial?

16. Raportul dintre baza mare și baza mică a unui trapez este k. Se duc diagonalele și se prelungesc cele două laturi neparalele pînă cînd se întîlnesc. Să se afle raportul dintre aria fiecărui triunghi format și aria trapezului. Puneți în evidență cele două triunghiuri de aceeași arie.

17. Aflați unghiurile unui romb a cărui latură este medie proporțională între diagonalele sale.

18. Dacă segmentul ce unește mijloacele a două laturi opuse ale unui patrulater convex împarte patrulaterul în două patrulatere de aceeași arie, atunci patrulaterul inițial este un trapez sau un paralelogram.

19. Construiți un triunghi ABX ce are aceeași arie ca și un patrulater convex dat $ABCD$.

În încheiere, vom prezenta *modul cum se poate stabili teorema lui Pitagora cu ajutorul noțiunii de arie.*

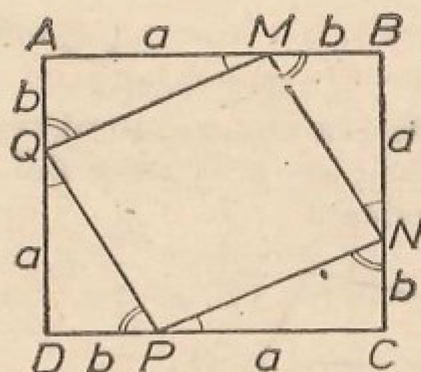


Fig. II.17

În figura II.17 $ABCD$ este un pătrat, $AM \equiv BN \equiv CP \equiv DQ = a$ iar $AQ \equiv BM \equiv CN \equiv DP = b$. Din triunghiurile congruente AMQ, BNM, CPN, DQP deducem congruența unghiurilor marcate cu o linie, respectiv cu două și apoi, pe baza teoremei sumei unghiurilor într-un triunghi, că $MNPQ$ este un dreptunghi. Din congruența acelorași triunghiuri deducem că $MNPQ$ este un pătrat. Scriind (vezi problema 9) $S_{ABCD} = S_{MNPQ} + S_{AMQ} + \ldots$, deducem că $(a + b)^2 = MN^2 + 4\frac{ab}{2}$, deci $MN^2 = a^2 + b^2$, ceea ce este tocmai teorema lui Pitagora.

Problemă distractivă. Împărțiți poligonul din figura II.18 în cinci poligoane astfel încît, aranjîndu-le altfel, să se formeze din ele un pătrat. *Rezolvare.* Aria poligonului este 3, deci latura pătratului ce se va forma

va fi $\sqrt{3}$. Dacă examinăm mai atent figura, găsim în ea segmente de lungime $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, dar nu de $\sqrt{3}$.

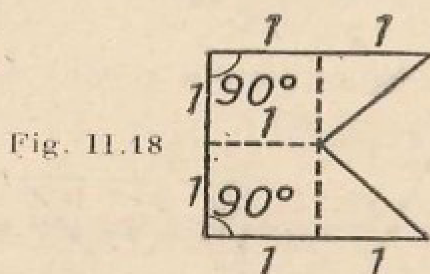


Fig. II.18

Să transformăm întîi poligonul într-un dreptunghi, de formă mai apropiată de cea pătrată:

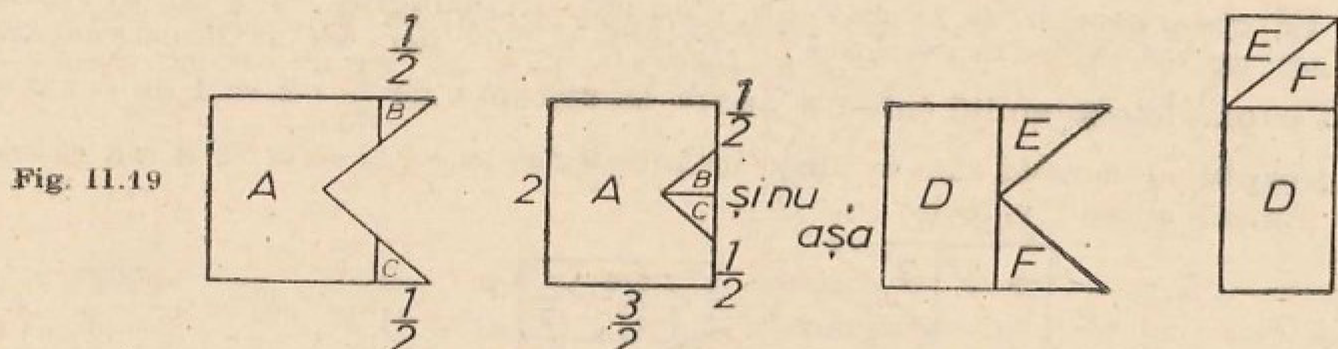


Fig. II.19

Apoi să transformăm dreptunghiul într-un paralelogram, ce are una din laturi $\sqrt{3}$, dar avînd grijă să nu atingem tăieturile existente.

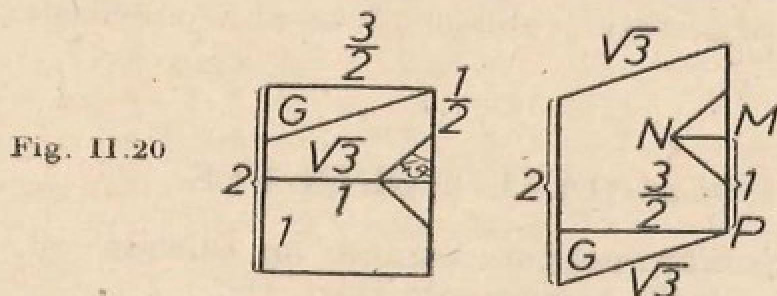


Fig. II.20

Latura din stînga a triunghiului G se calculează prin teorema lui Pitagora, găsindu-se $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, de unde sîntem siguri că tăietura ce separă pe G nu le întîlnește pe cele dinainte.

În fine, cum aria paralelogramului obținut este tot 3, ca și a figurii inițiale, rezultă că înălțimea sa corespunzătoare acestei laturi va fi $\sqrt{3}$ și, tăindu-l după această înălțime, vom putea compune pătratul dorit (vezi fig. II.21). Dar problema cere să tăiem poligonul în 5, iar tăietura după acea înălțime riscă să conducă la 6 părți, cu excepția cazului cînd am face-o începînd din colțul dreapta jos P al paralelogramului (fig. II.21).

Nu cumva atingem cu această tăietură „bucățile mici"? Un calcul ne arată că nu! Distanța MN este de $\frac{1}{2}$ — vezi fig. II.19— iar înălțimea din P taie dreapta MN într-un punct Q așa încît $\triangle PMQ$ este asemenea cu G și

din acea asemănare obținem $\frac{MQ}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{MP}{\frac{3}{2}}$ de unde $MQ = \frac{\sqrt{3}}{3} > \frac{1}{2}$ (inegalitatea se verifică prin calcul direct sau prin ridicare la pătrat: $\left(\frac{3}{9} > \frac{1}{4}\right)$.

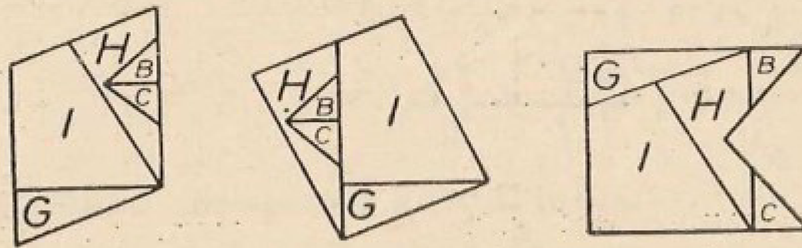


Fig. II.21

Să observăm și că G este un triunghi dreptunghic cu unghiul „din dreapta" de 30°. Aceasta ne arată că $\sphericalangle QPM = 30°$, deci PQ întîlnește latura opusă a paralelogramului într-un punct la distanța de $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ de capătul din dreapta al acestei laturi, deci în interiorul ei.

Există și altă soluție:

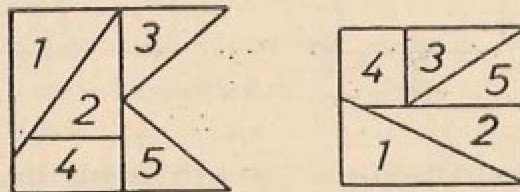


Fig. II.22

Explicați-o și încercați să găsiți și altele!

Eventual încercați aceeași problemă și în alte poligoane: un paralelogram, un triunghi etc.

POLIGOANE REGULATE

Definiție. Numim poligon regulat un poligon cu toate laturile congruente și toate unghiurile congruente între ele.

Dacă printr-un procedeu oarecare împărțim un cerc în n ($n \geqslant 3$) arce egale și ducem corzile care subîntind pe fiecare din ele, unind punctele de diviziune succesive, obținem un astfel de poligon.

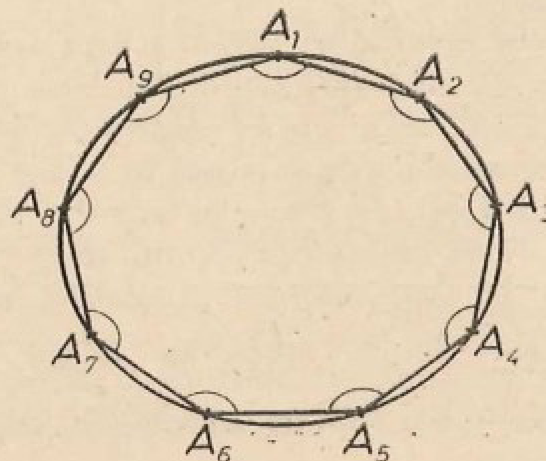


Fig. II.23

Unghiurile acestui poligon sînt congruente fiind înscrise în arce de măsuri egale cu $\frac{360^\circ}{n} \cdot (n-2)$ iar laturile sînt congruente subîntinzînd arce de aceeași măsură: $\frac{360^\circ}{n}$.

Am pornit prin a constata că astfel de poligoane regulate există. Să demonstrăm următoarea:

T e o r e m ă: Orice poligon regulat se poate înscrie într-un cerc.

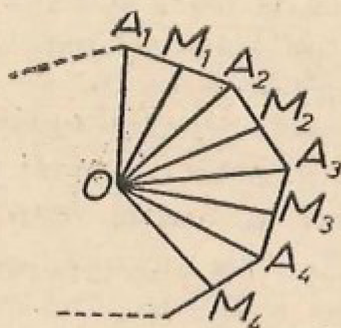
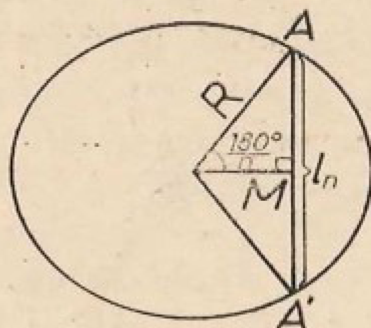


Fig. II.24

Demonstrație. Dacă $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle A_2 \equiv \sphericalangle A_3 \equiv \ldots \equiv \sphericalangle A_n$ și laturile $A_1A_2 \equiv A_2A_3 \equiv A_3A_4 \ldots \equiv A_mA_n$, ducem mediatoarele laturilor A_1A_2 și A_2A_3 (vezi figurile II.23, II.24 și notațiile de acolo). Mediatoarele M_1O și M_2O se întîlnesc în O. (Dacă nu s-ar întîlni, ar însemna că sînt paralele deci că $\sphericalangle A_1A_2A_3 = 180^\circ$ ceeace este absurd). Triunghiurile $\triangle M_1A_2O \equiv \triangle M_2A_2O$, ($M_1$ și M_2 fiind mijloacele laturilor A_1A_2 respectiv A_2A_3). Rezultă că OA_2 este bisectoarea lui $\sphericalangle A_1A_2A_3$. M_2O fiind mediatoare, segmentele $OA_2 \equiv OA_3$. Ducem $OM_3 \perp A_3A_4$. Triunghiurile $\triangle OA_3M_2 \equiv \triangle OA_3M_3$ pentru că ipotenuza OA_3 este aceiași și $\sphericalangle M_2A_3O$ este jumătate din unghiul poligonului, deci congruent cu $\sphericalangle OA_3M_3$. Rezultă că și $M_2A_3 \equiv A_3M_3$, deci OM_3 este mediatoarea lui A_3A_4 deci, $OA_3 \equiv OA_4$. La fel se arată că $OA_4 \equiv OA_5$ etc. Deci toate punctele A_1, A_2, ..., A_n sînt egal depărtate de O. Teorema este demonstrată. Acest punct O se va numi centrul poligonului regulat.

Fig. II.25



Vom nota latura poligonului regulat cu n laturi cu l_n (fig. II.25). Știind că un unghi la centru care subîntinde o latură de poligon regulat are $\frac{360^\circ}{n}$ și cunoscînd raza R a cercului circumscris poligonului, putem calcula AM (unde

M este mijlocul laturii AA'). $AM = R \sin \frac{180°}{n}$ și deci $l_n = 2R \sin \frac{180°}{n}$. Segmentul OM dus din centru, perpendicular pe latură în punctul M se va numi *apotema* poligonului regulat. O vom nota cu a_n, și $a_n = R \cos \frac{180°}{n}$.

Dacă lucrurile par simple presupunînd deja făcută împărțirea unui cerc în arce egale, există totuși anumite dificultăți de construcție. De pildă s-a demonstrat că împărțirea unui cerc în 7 arce egale nu se poate face cu rigla și compasul (această demonstrație ține de fapt de algebră și nu de geometrie). Fiți atenți: Nu am afirmat că nu s-a făcut pînă în prezent. Am afirmat că este dovedită imposibilitatea acestei operații. Construcțiile pe care le găsiți prin anumite cărți de desen sînt aproximative, contînd și pe gradul de imperfecțiune a obiectelor cu care desenăm (grosimea minei creionului de pildă). Ele nu constituie procedee exacte ci numai utile.

Vom găsi că unghiul la centru corespunzător laturii unui hexagon regulat este de 60° (fig. II.26). De aici rezultă un procedeu simplu de construcție a sa. Toate triunghiurile avînd un vîrf în centrul hexagonului și ca latură

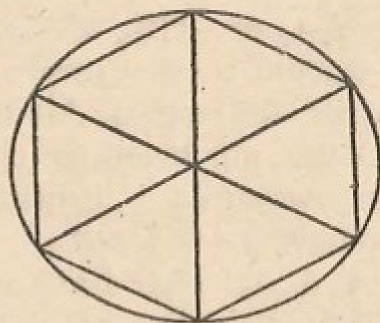


Fig. II.26

opusă lui, laturile hexagonului, sînt triunghiuri echilaterale. Deci latura măsoară cît raza: $l_6 = R$. Împărțim un cerc în 6 părți egale luînd un punct A pe cerc drept centru și cu o „deschidere" a compasului cît R, trasînd B și F (fig. II.27). Mutînd apoi succesiv centrul cercului obținem și celelalte puncte de diviziune, vîrfurile hexagonului căutat. Observăm că este suficient să găsim cu compasul numai trei puncte consecutive A, B, F, și pe celelalte le aflăm ducînd diametrele cu aceste extremități. Apotema $a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

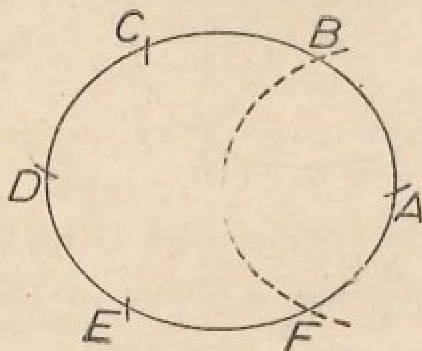


Fig. II.27

Dacă unim din două în două vîrfurile unui hexagon, de pildă A, C, E, obţinem un triunghi echilateral. Calculînd din formulele laturilor şi apotemelor, obţinem $L_3 = R\sqrt{3}$ şi $a_3 = \frac{R}{2}$.

La pătrat (poligon regulat cu 4 laturi), unghiul la centru corespunzător este de 90°. Aplicînd formulele obţinem $l_4 = R\sqrt{2}$, $a_4 = R\frac{\sqrt{2}}{2}$.

„Poligoane" regulate stelate

Dacă împărţim cercul în cinci arce egale şi unim punctele de diviziune din două în două, segmentele AC, CE, EB, BD, DA vor fi laturile unui „poligon" regulat de un tip anumit: Laturile lui se intersectează şi în interiorul cercului. Acest „Poligon" se numeşte stelat (fig. II. 28).

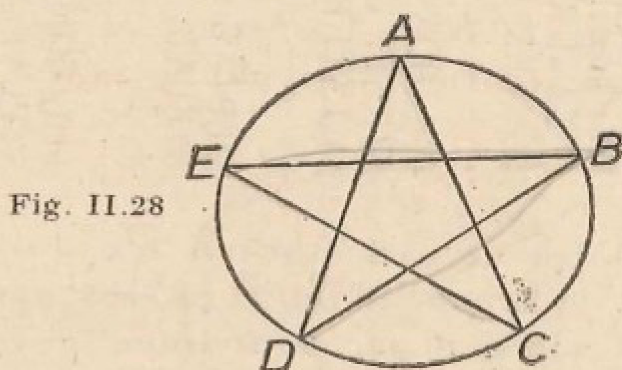


Fig. II.28

(El este un poligon regulat concav.)

Atunci cînd am făcut afirmaţia că orice poligon regulat are vîrfurile pe cerc, demonstraţia de mai sus era valabilă şi pentru „poligoane" stelate: nu s-a întrebuinţat nicăieri în demonstraţie faptul că poligonul ar fi convex. Trebuie numai să considerăm laturile complete, nu porţiuni din ele, cu vîrfurile lui, extremităţile laturilor, aşezate pe cerc.

O primă constatare:

Presupunem că un cerc a fost împărţit într-un număr par de arce egale şi ducem ca laturi coardele sărind peste cîte un punct de diviziune. Obţinem un poligon regulat cu un număr de laturi de două ori mai mic. De pildă unind vîrfurile unui hexagon regulat din două în două, obţinem un triunghi echilateral. Se pune deci problema „simplificării" cu un factor comun al numărului de diviziuni în care am împărţit cercul şi al „paşilor" — arcuri pe care" îi sărim" cînd ducem corzile — laturi.

Să presupunem că am împărţit un cerc în 14 arce egale. Facem un tabel în care apare ca fracţie ireductibilă raportul dintre numărul de arce iniţiale şi al „paşilor săriţi". În funcţie de acesta vom preciza natura poligo-

nului obținut. Notăm cu n numărul de diviziuni inițiale, cu k „pașii" (arcele subîntinse de o coardă) și cu f fracția ireductibilă obținută din simplificarea raportului n/k.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
n	14	14	14	14	14	14	14
k	1	2	3	4	5	6	7
f	14	7	$\frac{14}{3}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{14}{5}$	$\frac{7}{3}$	
NATURA POLIGONULUI	POLIGON CONVEX CU 14 LATURI	HEPTAGON (7 LATURI) CONVEX	POLIGON STELAT CU 14 LATURI	HEPTAGON STELAT	POLIGON STELAT CU 14 LATURI	HEPTAGON STELAT	NU ESTE POLIGON;

Am oprit aici tabelul. Dacă $k = 8$, atunci $n - k = 6$ și este ca și cum am fi început să socotim de la punctul inițial pe cerc în celălalt sens. Dacă în loc de 14 am fi avut un număr impar de diviziuni inițiale, de exemplu $2p + 1$, ne opream la $k = p$; de exemplu la $n = 17$ ne opream la $k = 8$.

Altă constatare: dacă fracția ireductibilă este un număr întreg, poligonul este convex. Dacă numitorul lui f nu este 1 atunci poligonul este stelat și anume steaua are atîtea „colțuri" cît arată numărătorul.

Deci nu toate poligoanele stelate cu același număr de colțuri sînt „asemenea". Heptagonul din coloana a IV-a diferă de cel din coloana a VI-a.

Tabel de rezultate

$l_3 = R\sqrt{3}$ $\qquad a_3 = \frac{R}{2}$

$l_4 = R\sqrt{2}$ $\qquad a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

$l_6 = R$ $\qquad a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

$l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ $\qquad a_5 = \frac{R}{4}(\sqrt{5} + 1)$

$l_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$ $\qquad a_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

Tabelul ar deveni mai ușor de reținut dacă am adăuga la a_3 și la l_6 cîte un factor $\sqrt{1}$ pe lîngă R; ultimile două linii din tabel nu trebuie memorate.

12. Probleme

1. În triunghiul echilateral ABC de latură a (fig. II.29) se iau punctele N, $M \in AB$, $N'P' \in BC$, $M', P \in AC$

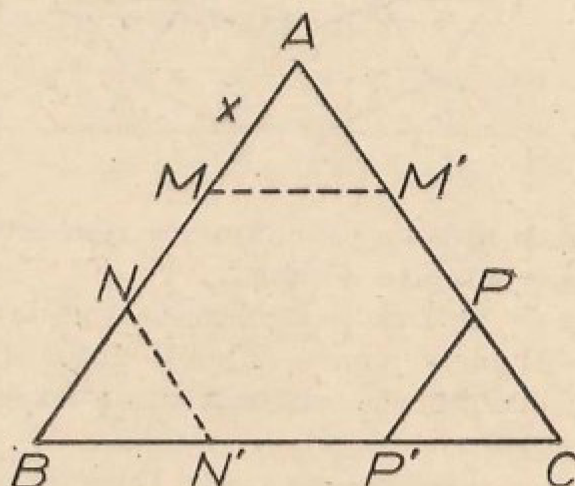


Fig. II.29

Determinați x în funcție de a astfel ca hexagonul $MM'PP'N'N$ să fie regulat.

2. Pătratului din figura II.30, de latură a i se „taie colțurile" în așa fel încît să „rămînă" un octogon regulat. Să se calculeze latura x a octogonului în funcție de latura a a pătratului (fig. II.30).

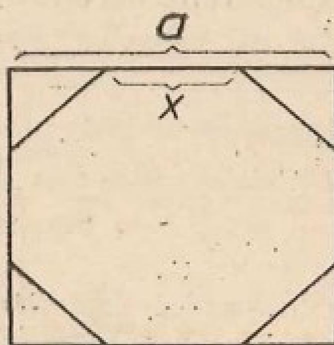


Fig. II.30

3. Cunoscînd l_n și R, calculați a_n

4. Folosind pătratul înscris în cerc de rază R, calculați latura octogonului convex înscris în cerc în funcție de R.

5. Pe laturile hexagonului regulat $ABCDEF$ se construiesc în afară pătrate, și în vîrfurile hexagonului, cu două laturi ale acestor pătrate

ca laturi, triunghiuri echilaterale de tipul lui BHI. Să se precizeze ce fel de poligon este $GHIJKLMNOPRS$ (fig. II.31).

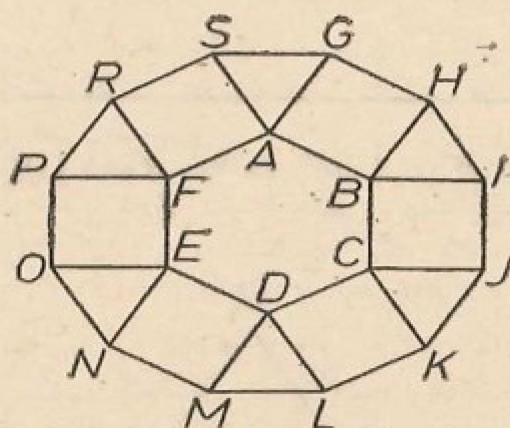


Fig. II.31

6. Precizați natura poligoanelor regulate pentru $n = 7$. Cîte „tipuri" de heptagoane stelate există?

7. Precizați natura poligoanelor regulate corespunzătoare împărțirii cercului în 21 arce egale. Faceți tabelul.

8. Să se stabilească măsura unui unghi al unui dodecagon regulat convex ($n = 12$).

9. Dacă un poligon are toate laturile congruente este oare regulat?

10. Dacă un poligon are toate unghiurile congruente este oare regulat?

11. Găsiți numărul diagonalelor unui octogon regulat convex. Era necesar să precizăm că poligonul este regulat?

12. Să se demonstreze că în orice poligon regulat convex se poate inscrie un cerc, adică se poate construi un cerc tangent la toate laturile sale.

Să se arate că centrul cercului înscris coincide cu cel al cercului circumscris poligonului regulat convex.

O problemă cu enunț deosebit. Să punem întîi problema construirii cu rigla și compasul a unui segment de lungime $\sqrt{n}$ unde n este orice număr natural.

Știm că construim pe $\sqrt{2}$ cunoscînd segmentul unitate (fig. II.32).

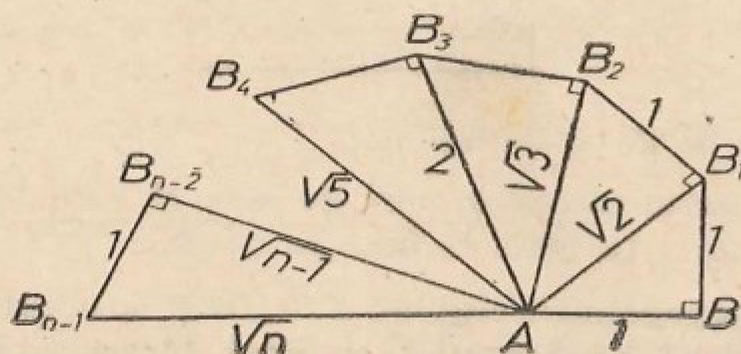


Fig. II.32

„SPIRALA" LUI ARHIMEDE. Pe segmentul $AB = 1$ ducem perpendiculara $BB_1 = 1$. Segmentul $AB_1 = \sqrt{2}$. Pe AB_1 ducem perpendiculara $B_1B_2 = 1$ și continuăm cu același procedeu: $B_2B_3 \perp AB_2$ ($B_2B_3 = 1$) etc. Din teorema lui Pitagora rezultă $AB_2 = \sqrt{3}$, $AB_3 = \sqrt{4}, = 2$, $AB_4 = \sqrt{5}$ etc. Presupunînd construit segmentul $AB_{n-2} = \sqrt{n-1}$, construim $AB_{n1} = \sqrt{n}$. Procedeul duce la construirea lui $\sqrt{n}$ prin „recurență", adică folosindu-ne de construcția prealabilă a segmentelor $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-1}$.

Problemă:* *Dîndu-se un cerc de centru O cunoscut, să se găsească numai cu compasul vîrfurile unui pătrat înscris în el.*

Dacă reușim, raza R fiind dată, să putem „cuprinde" în compas un segment de $R\sqrt{2}$, am reușit construcția (fig. II.33). Ca în orice problemă de construcție, să considerăm problema rezolvată: pornind dintr-un punct arbi-

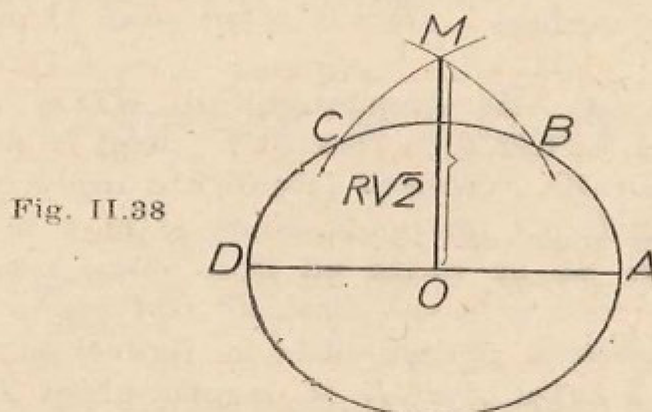


Fig. II.38

trar A, considerăm vîrfurile consecutive ale hexagonului regulat înscris în cerc, B, C, D. Deci segmentul $AC = R\sqrt{3}$. Cu o deschidere de compas cît AC și centrul în A și apoi în D, trasăm două arce de cerc care se taie în M. Considerînd triunghiul dreptunghic AMO, segmentul $OM = R\sqrt{2}$. Deci construim întîi vîrfurile trapezului A, B, C D, apoi cu „deschiderea" AC și centrele A și D trasăm arcele de cerc care se taie în M, „prindem" în compas distanța OM și o „purtăm" pe cerc de trei ori. Obținem astfel vîrfurile pătratului căutat.

Două probleme rezolvate 1. *Problemă rezolvată. Să se arate că dacă două numere pozitive au suma constantă, produsul lor este maxim cînd ele sînt egale.*

Vom încerca o soluție geometrică a acestei probleme. Pentru aceasta putem să o formulăm și în felul următor:

Să se demonstreze că din toate dreptunghiurile cu perimetru constant, aria cea mai mare o are pătratul.

* Problemă dată la etapa pe municipiul București a Olimpiadei din 1978

Comparăm pătratul $ABCD$ de latură a cu dreptunghiul $DEFG$ cu lungimea $DG = a + x$ și lățimea $ED = a - x$ (fig. II.34).

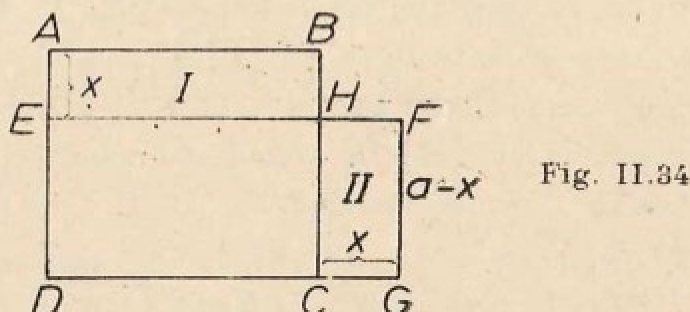


Fig. II.34

Evident ambele au același perimetru. Cu notațiile din figură, ca să comparăm ariile pătratului $ABCD$ cu a dreptunghiului $DEFG$ revine la a preciza care din ariile dreptunghiurilor $ABHE$ și $HFGC$ este mai mare. Ambele dreptunghiuri au cîte o latură x. Dreptunghiul II are cealaltă latură cu x mai mică decît o are dreptunghiul I. Deci dreptunghiul II are aria mai mică.

Să spunem și altfel:

Aria lui $ABHE$ este xa. Aria dreptunghiului $HFGC$ este $x(a - x) = ax - x^2$. Vizibil aria lui $EFGD$ este mai mică decît a pătratului $ABCD$ pentru că $ax \geqslant ax - x^2$ soluție evidentă (Egalitate am avea dacă $x = 0$).

Această problemă rezolvată ne poate duce și la o a doua:

2. ***Problemă rezolvată:*** Să se arate că *dacă două numere pozitive au produsul constant, suma lor este minimă cînd ele sînt egale.*

Vom porni de la problema precedentă: în figura pe care am făcut-o pentru ca s-o rezolvăm, pătratul $ABCD$ și dreptunghiul $DGFE$ au același perimetru și ariile diferă pentru că dreptunghiul (II) este mai mic decît dreptunghiul (I). Deci adăugăm la dreptunghiul II dreptunghiul cu interior hașurat (III) $FNMG$ astfel încît dreptunghiul (I) și dreptunghiul $CMNH$ să devină echivalente (fig. II.35). Deci pătratul $ABCD$ și dreptunghiul $EDMN$ sînt

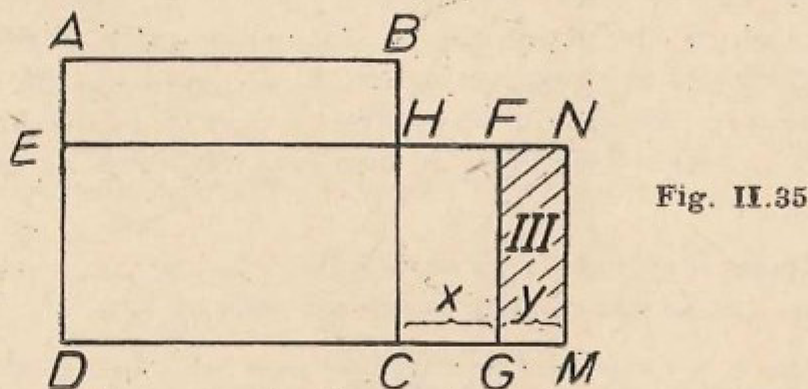


Fig. II.35

echivalente (produsele $DM \cdot MN$ și $AB \cdot AD$ sînt egale), dar perimetrele lor diferă, cel al pătratului este mai mic deci $2(DM + MN) \geqslant 2(AB + AD)$.

O altă soluție la această problemă se poate da prin puterea punctului interior: dintre toate corzile care trec prin M, în cercul de centru O, cea mai

scurtă este $AB \perp OM$ (fig. II.36). Într-adevăr oricare altă coardă $A'B'$ care trece prin M are distanță $ON < OM$ deci $B'N^2 = R^2 - ON^2 > R^2 -$

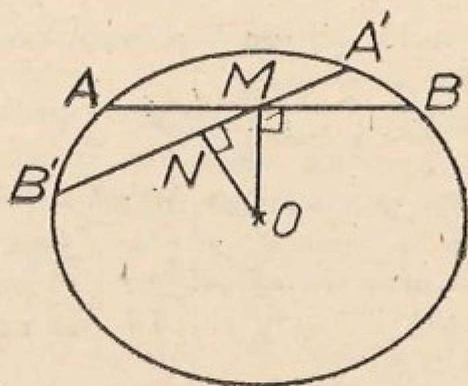


Fig. II.36

$- OM^2 = BM^2$, deci $2B'N > 2BM$, deci $A'B' > AB$ adică $B'M + MA' > AM + MB$. Dar aplicînd puterea punctului M. $AM \cdot MB = A'M \cdot MB' =$ constant și problema este demonstrată!

LUNGIMEA ȘI ARIA CERCULUI

Calcularea și chiar definirea lungimii unei curbe și a ariei „mărginite" de o curbă închisă sînt probleme care în unele detalii ale lor necesită cunoștințe ce nu le aveți încă. De aceea noi nu vom demonstra formulele pentru lungimea și aria cercului, ci doar vom arăta un mod inuitiv de a ajunge la ele.

Să considerăm două poligoane regulate convexe cu același număr de laturi, de exemplu două octogoane, înscrise fiecare în cîte un cerc.

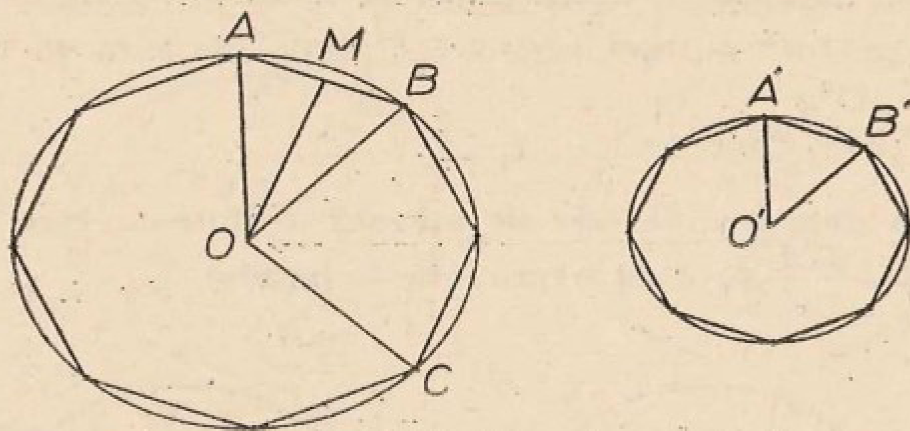


Fig II.37

Să notăm cu P, p perimetrele lor, cu R, r razele cercurilor în care sînt înscrise.

Avem $\frac{P}{p} = \frac{8AB}{8A'B'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{R}{r}$, ca urmare a faptului că $\triangle AOB \sim \triangle A'O'B'$ (cazul 1, de exemplu: $\frac{CA}{O'A'} = \frac{OB}{O'B'}$, $\sphericalangle AOB = \frac{360^\circ}{8} = \sphericalangle A'O'B'$).

Dacă am considera în loc de octogoane, poligoane cu un număr foarte mare de laturi înscrise în aceleași cercuri, relația $\frac{P}{p} = \frac{R}{r}$ ar rămîne adevărată, iar P ar fi „aproape" de lungimea L a cercului de rază R, p ar fi „aproape" de lungimea l a cercului de rază r.

Obținem, schimbînd mezii între ei, $\frac{L}{R} = \frac{l}{r}$, adică: raportul dintre lungimea unui cerc și raza sa este același pentru toate cercurile.

Acest raport constant se notează cu 2π; valoarea aproximativă a lui π este 3,14159.... π este un număr irațional; nici el nu se „măsoară" ci se determină de exemplu prin formula, ce conține o sumă infinită, și care o veți învăța în clasa a XII-a:

$$\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \dots\right).$$

Lungimea L a unui cerc, de rază R este egală cu 2π înmulțit cu R adică $L = 2\pi R$.

Să revenim la figura II.37 și să notăm cu Q lungimea liniei ABC formată din trei laturi ale octogonului. Avem $\frac{Q}{p} = \frac{3AB}{8AB} = \frac{3}{8} = \frac{\sphericalangle AOC}{360°} = \frac{\widehat{ABC}}{360°}$, relație ce rămîne adevărată chiar dacă arcul ABC ar fi mare (prin $\widehat{ABC}$ înțelegem măsura, în grade, a arcului ABC).

Să păstrăm punctele A și C fixe și să considerăm în loc de un octogon, un poligon regulat cu un număr mare de laturi, înscris în același cerc, avînd A și C printre vîrfurile sale (pentru aceasta numărul laturilor sale îl vom alege un multiplu de 8). Relația $\frac{Q}{P} = \frac{\widehat{ABC}}{360°}$ va rămîne valabilă și pentru acest poligon; Q va fi „aproape" de lungimea M a arcului ABC, iar P va fi, ca mai înainte „aproape" de lungimea L a cercului de rază R. Obținem $\frac{M}{L} = \frac{\widehat{ABC}}{360°}$, de unde deducem:

Lungimea unui arc de cerc de măsură u dintr-un cerc de rază R este dată de formula $\frac{u\pi R}{180°}$ (u fiind exprimată în grade).

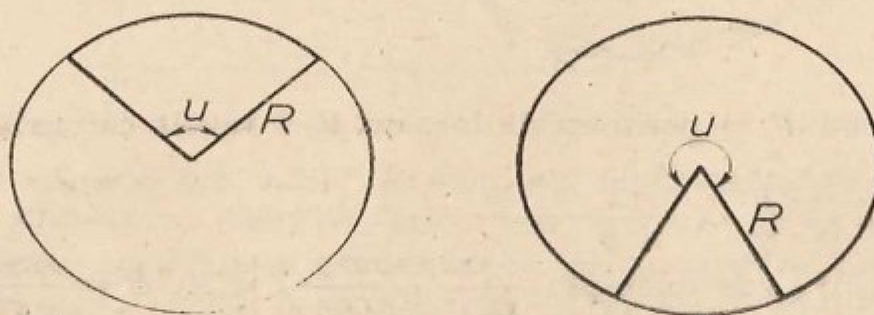


Fig. II.38

Să revenim din nou la figura II.37 şi să considerăm aria octogonului $AB \cdot C...$ Ea este egală cu $8S_{AOB} = \frac{8\ AB \cdot OM}{2} = \frac{P \cdot OM}{2}$. Pînă aici demonstraţia este riguroasă şi ne conduce la:

T e o r e m a. Aria unui poligon regulat convex este egală cu jumătatea produsului dintre perimetrul şi apotema poligonului.

Dacă vom considera un poligon regulat cu număr foarte mare de laturi, inscris în cercul de rază R, atunci perimetrul său va fi „aproape" de lungimea cercului, iar apotema „aproape" de raza cercului. Ajungem la concluzia că aria unui cerc este egală cu jumătate din produsul dintre lungimea şi raza sa, adică $\frac{2\pi R \cdot R}{2}$:

Aria unui cerc de rază R este egală cu πR^2.

În fine, să considerăm, în figura II.37, aria poligonului $AB...CO$. Ea este egală cu de trei ori aria triunghiului AOB, deci cu $\frac{3}{8}$ din aria octogonului regulat; raportul $\frac{3}{8}$ este tot una cu raportul dintre măsura arcului ABC şi 360°. Ţinînd punctele A şi C fixe şi mărind mult numărul laturilor poligonului regulat (acest număr rămînînd un multiplu de 8), aria poligonului considerat $AB...CO$ va fi „aproape de aria mărginită de razele OA, OC şi arcul ABC etc. Ajungem la:

D e f i n i ţ i a. Se numeşte sector circular figura formată dintr-un arc al unui cerc şi din razele acelui cerc cu capetele în capetele arcului

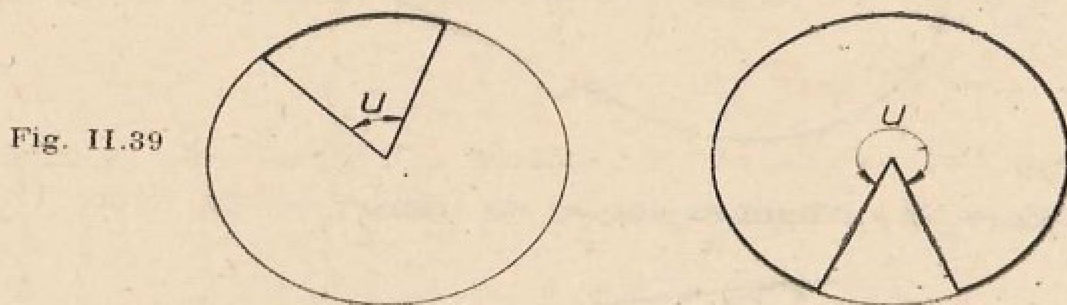


Fig. II.39

şi la:

Aria unui sector circular al unui cerc de rază R ce corespunde unui arc de măsură u (exprimată în grade) este dată de formula $\frac{u\pi R^2}{360°}$.

Observaţie. Cuvintele „multe", „aproape", nu au sens matematic. Ele sugerează numai un raţionament, mai rafinat, ce nu l-am precizat aici.

13. Probleme

1. Aflați aria cuprinsă între un arc de $60°$ al unui cerc de rază R şi coarda sa.

2. Aceeaşi problemă pentru un arc de $240°$.

3. Pe cele trei laturi ale unui triunghi dreptunghic ca diametre se descriu cercuri ca în figura II.40. Arătați că aria haşurată este egală cu aria triunghiului.

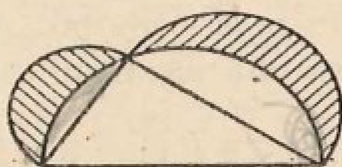


Fig. II.40

4. Două cercuri secante au razele de 10 şi 7, iar distanța centrelor de 15. Aflați aria porțiunii comune a celor două cercuri.

5. Aceeaşi problemă, cînd distanța centrelor este de 5.

6. Două cercuri tangente exterioare au razele de 9 şi 4. Aflați aria cuprinsă între cele două cercuri şi una din tangentele comune exterioare.

7. Aflați aria hexagonului regulat de latură a.

8. Aflați perimetrul figurii II.41, dacă raza cercului este 6 şi distanța de la centru la vîrf este 12.

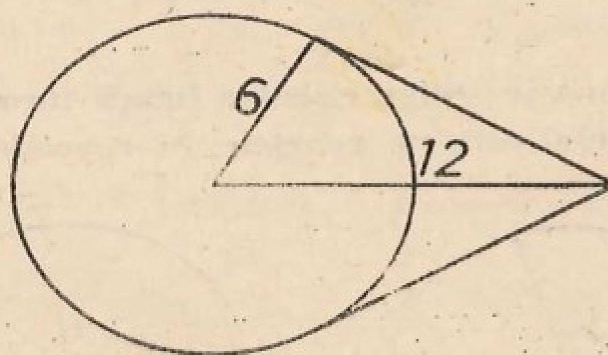


Fig. II.41

9. Care este lungimea curelei de transmisie din figura II.42?

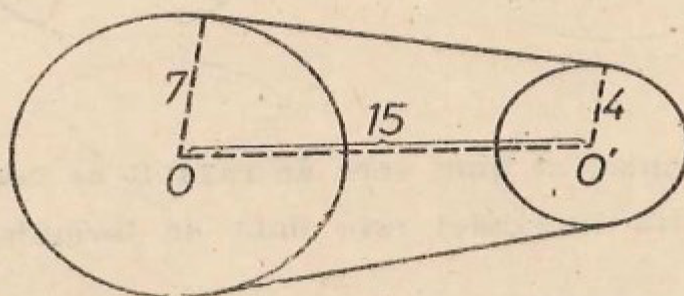


Fig. II.42

10. Aflați lungimea şi aria unui semicerc. Desenați.

11. Calculați aria din figura II.43 (hașurată), precum și perimetrul figurii hașurate, razele celor trei cercuri fiind toate egale cu 2.

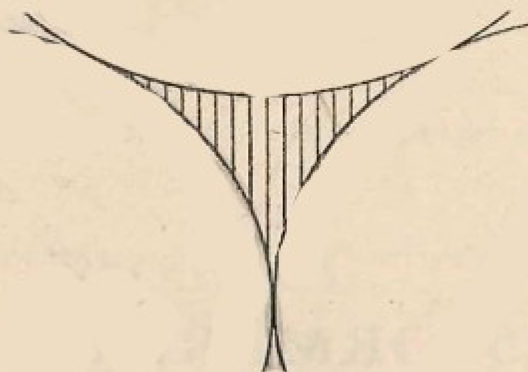


Fig. II.43

12. Aceeași problemă pentru figura hașurată II.44

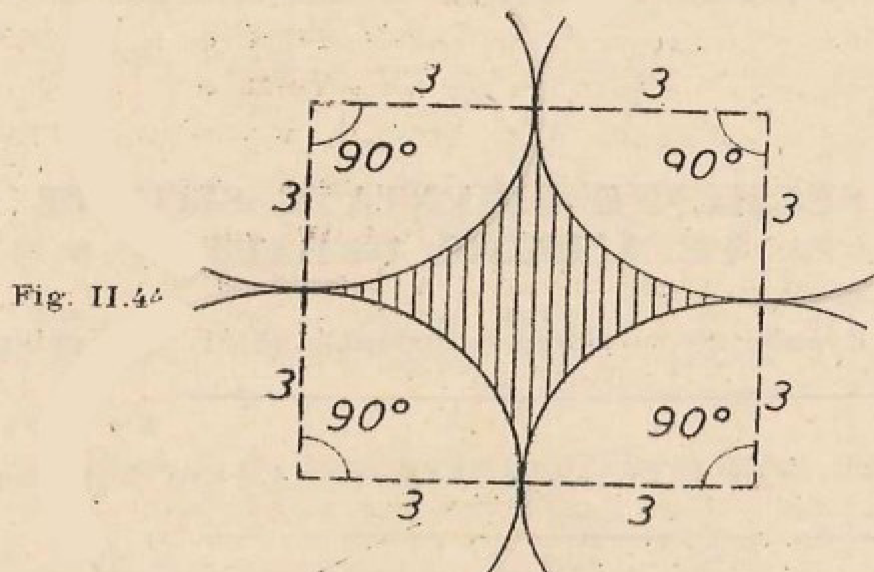


Fig. II.44

CAPITOLUL 3

TRANSFORMĂRI GEOMETRICE

În primele paragrafe ale acestui capitol vom prezenta cîteva noțiuni pregătitoare.

SEGMENTE ORIENTATE SITUATE PE ACEEAŞI DREAPTĂ

Două semidrepte de pe aceeași dreaptă pot fi de același sens (cu alte



Fig. III.1

cuvinte se poate ca una să fie inclusă în cealaltă), sau de sensuri contrare (cu



Fig. III.2

alte cuvinte, în caz contrar, sau intersecția lor este interiorul unui segment, sau ele n-au nici un punct comun).

Observație. Dacă $A \neq B$, atunci semidreptele AB și BA au sensuri contrare.

Definiție. Vom numi segment orientat o figură formată din două puncte A, B, nu neapărat diferite, luate în această ordine.

Segmentul orientat format din A și B se va nota $\overrightarrow{AB}$.

Deci $\overrightarrow{AA}$ este și el un segment orientat, iar, pentru $A \neq B$, segmentele orientate $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BA}$ sînt diferite (spre deosebire de segmentele „obișnuite" AB și BA care sînt aceleași).

Punctul A se numește *originea* iar B *extremitatea* segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$.

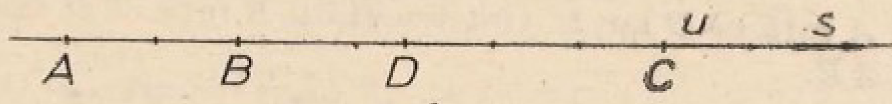
Definiție. Să considerăm o dreaptă d; un segment (obișnuit) s pe ea și un „sens" pe d, dat printr-o semidreaptă s a lui d.

Fig. III.3 

Acestea fiind *fixate*, definim măsura unui segment orientat $\overrightarrow{AB}$ de pe d, și o notăm tot cu $\overrightarrow{AB}$, astfel:

Cazul 1. **Dacă $B = A$, măsura segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$ este considerată** O: $\overrightarrow{AA} = 0$.

Cazul 2. **Dacă $B \neq A$, măsura segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$ este egală cu lungimea segmentului (obișnuit) AB, cu semnul + dacă semidreapta AB are același sens cu s și cu semnul — dacă semidreapta AB are sens contrar cu s.**

Fig. III.4 $\overrightarrow{AB} = +2$ $\overrightarrow{CD} = -3$ 

Deci $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = 0$. Dacă măsurile a două segmente orientate sînt egale și nu sînt O atunci segmentele (obișnuite) corespunzătoare sînt congruente. Reciproc, dacă $AB \equiv CD$ atunci avem $\overrightarrow{AB} = \pm \overrightarrow{CD}$, semnul fiind + sau — după cum semidreptele AB și CD sînt de același sens sau de sensuri contrare.

Teoremă. Dacă A, B, C sînt puncte coliniare, avem $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
Demonstrație. Va trebui să considerăm mai multe cazuri.

Cazul 1. $A = B$. Relația se reduce la $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}$.
Cazul 2. $B = C$. Analog.

Cazul 3. $A = C$. Relația devine $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = 0$; am observat mai sus că este adevărată.
Cazul 4. B este între A și C (fig. III.5).

Fig. III.5 

Semidreptele AB, BC, AC au același sens deci $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ au același semn și relația se reduce la $AB + BC = AC$.
Cazul 5. A este între B și C (fig. III.6).

Fig. III.6 

$\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BC}$ au semne contrare, $BC > AB$, $\overrightarrow{AC}$ are același semn cu $\overrightarrow{BC}$ și relația se reduce la $BC - AB = AC$.

Cazul 6. C este între A şi B.

Se demonstrează asemănător cu cazul 5.

Observaţii. 1. În definiţia măsurii unui segment orientat de pe o dreaptă dată, putem alege dintr-o dată unitatea şi sensul, alegînd unitatea de măsură drept un segment orientat nenul, ce urmează să aibă măsura $+1$ (fig. III.7).



Fig. III.7

2. Noţiunea de măsură a unui segment orientat şi teorema demonstrată mai sus ne permit să demonstrăm unele afirmaţii fără a mai considera mai multe cazuri corespunzătoare diferitelor poziţii relative a punctelor de pe o dreaptă. De exemplu:

Problemă rezolvată. Fie A, B, O trei puncte coliniare, fie A' simetricul lui A faţă de O iar B' simetricul lui B faţă de O. Să se demonstreze că $A'B' \equiv \equiv AB$.

Rezolvare. Ipoteza se scrie $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{BO}$. Demonstraţie: $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'} = -\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = -\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA}$ deci, cum am observat după definiţia măsurii unui segment orientat, $A'B' \equiv AB$.

14. Probleme

1. Dacă A, B, C, D sînt puncte coliniare, arătaţi că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = 0$.

2. Care este relaţia între măsuri de segmente orientate care defineşte mijlocul M al unui segment (obişnuit) AB?

3. Dacă segmentele (obişnuite) AB şi CD au acelaşi mijloc, atunci $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BD}$.

4. Dacă $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, demonstraţi că $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

5. Fie A, O, O' trei puncte coliniare, fie B simetricul lui A faţă de O şi C simetricul lui B faţă de O'. Arătaţi că $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{OO'}$.

6. A, B, C, D fiind puncte coliniare, arătaţi că $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

7. A, B, M, N fiind puncte coliniare, $A \neq B$, $M \neq B$, $N \neq B$ şi $\dfrac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = \dfrac{\overrightarrow{NA}}{\overrightarrow{NB}}$, arătaţi că $M = N$.

Semidrepte de același sens și de sensuri contrare pe drepte paralele

Să considerăm toate dreptele paralele cu o dreaptă dată, să considerăm o secantă și un semiplan determinat de acea secantă. Toate semidreptele obținute intersectînd acel semiplan cu dreptele paralele cu dreapta dată le vom considera că sînt de același sens.

Dacă acum vom alege două semidrepte situate pe două din dreptele paralele din figura III.8, vom spune că semidreptele au același sens dacă fiecare din ele are același sens cu semidreapta din figura III.8 de pe dreapta pe care este situată, sau dacă fiecare din ele este de sens contrar cu semidreapta respectivă din figura III.8; vom spune că semidreptele alese sînt de sensuri

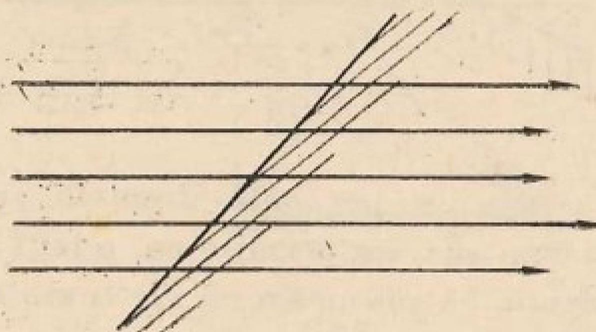


Fig. III.8

contrare dacă una din ele este de același sens și cealaltă de sens contrar cu semidreapta respectivă din figura III.8 (s_1 și s_2 sînt de același sens, t_1 și t_2 sînt de același sens, iar r_1 și r_2 sînt de sensuri contrare) (fig. III.9).

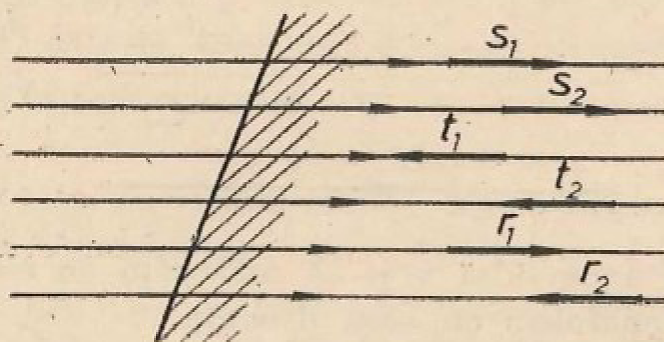


Fig. III.9

Să observăm că aceste convenții nu depind nici de secanta aleasă și nici de semiplanul ales (fig. III.10).

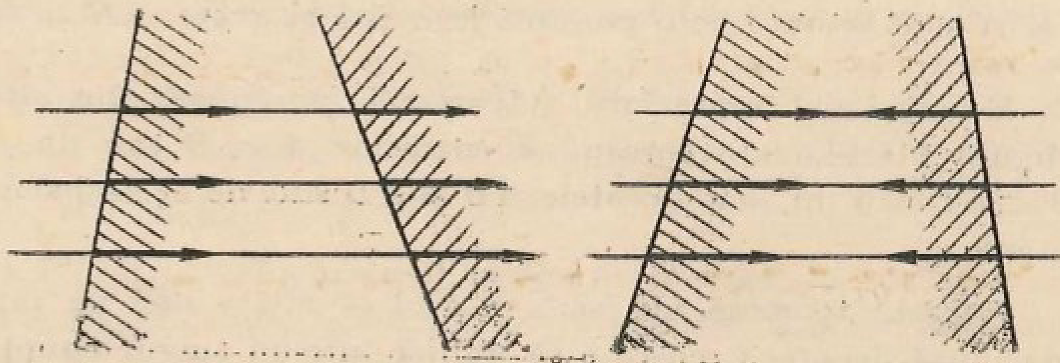


Fig. III.10

Să observăm și că, dacă încercăm să „acordăm" în același mod sensurile pe două drepte concurente, nu reușim, deoarece „acordarea" va depinde de secanta folosită (fig. III. 11).

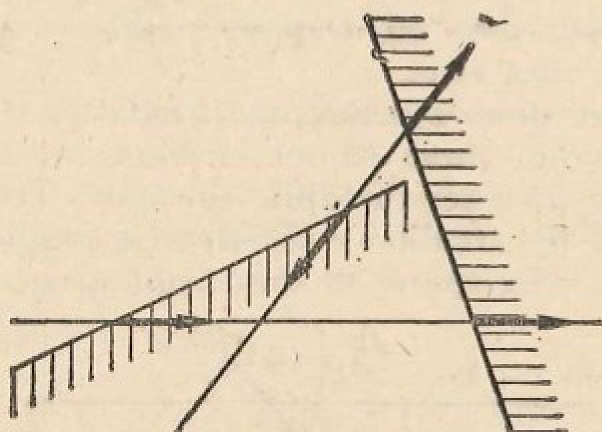
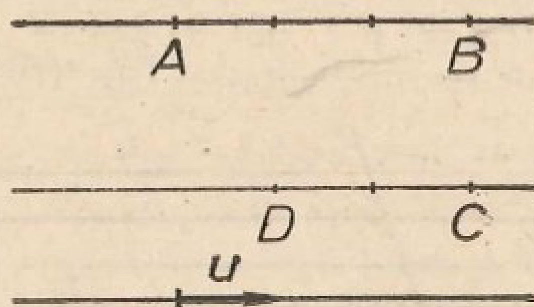


Fig. III.11

Acordarea sensurilor pe toate dreptele paralele cu o dreaptă dată, acordare descrisă mai sus, ne permite ca, odată aleasă o unitate de măsură și un sens pe o dreaptă, să măsurăm cu ele toate segmentele orientate situate pe drepte paralele cu dreapta dată (fig. III.12).



$\overrightarrow{AB} = 3$

$\overrightarrow{CD} = -2$

Fig. III.12

Nu avem însă voie să măsurăm cu ele segmente *orientate* situate pe drepte neparalele cu acea dreaptă.

Aplicație. Fie a și b două drepte paralele, A și B două puncte pe a, C și D două puncte pe b. Fie M mijlocul lui AC, N mijlocul lui BD. Atunci M și N sînt situate pe o paralelă la a și b și avem $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}}{2}$.

Enunțul dat reprezintă o teoremă, „compusă" din alte șase, indicate în figura III.13, care corespund cazurilor $A = B$ sau nu, $C = D$ sau nu, $AB \equiv CD$ sau nu, semidreptele AB și CD sînt de același sens sau de sensuri contrare.

Această teoremă nu ne face deci să aflăm nici un fapt nou. Ea este importantă deoarece reușește să unifice într-un singur enunț, destul de sim-

plu, cinci teoreme diferite (faptul ce corespunde primei figuri din III.13 nu merită titlul de teoremă). Aceasta este posibil datorită noțiunilor introduse în ultimele două paragrafe.

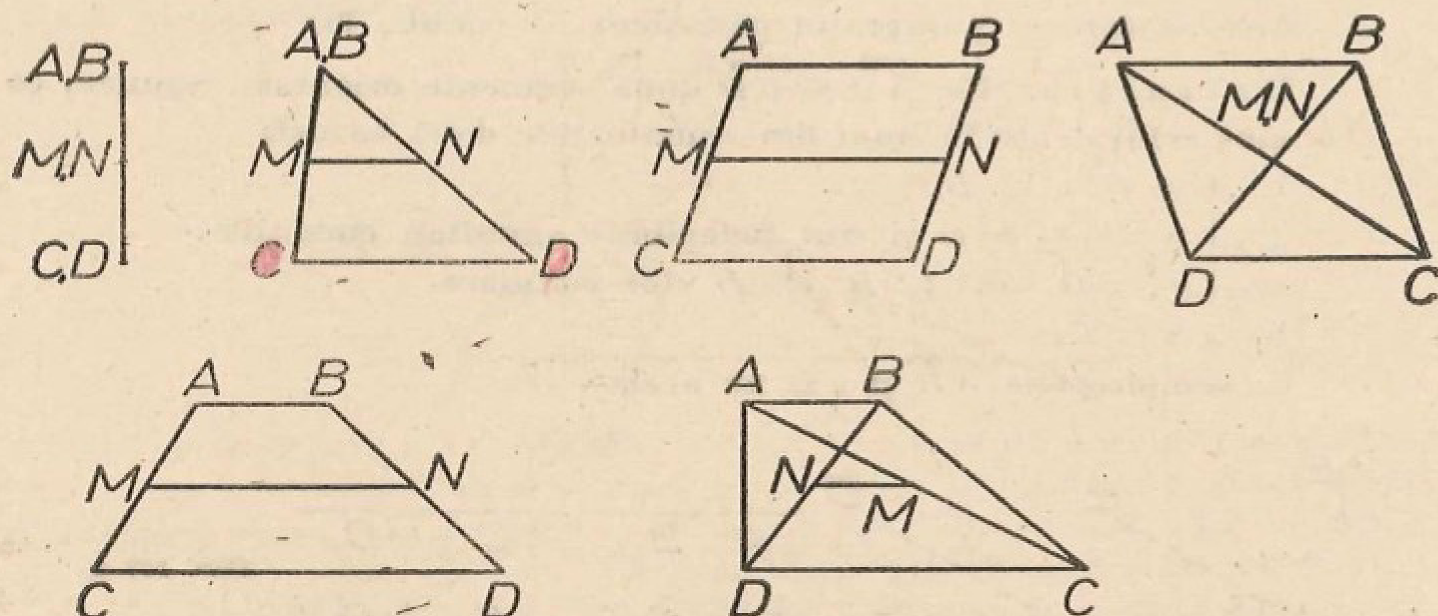


Fig. III.13

15. Probleme

1. Se consideră unghiurile xOy, $x'O'y'$ în care Ox și $O'x'$ sînt paralele și au același sens, iar Oy și $O'y'$ sînt de asemenea paralele și au același sens. Demonstrați că cele două unghiuri sînt congruente.

2. Două unghiuri cu laturile paralele și de sensuri contrare sînt congruente.

3. Două unghiuri cu laturile paralele, două de același sens și două de sensuri contrarii, sînt suplementare.

4. Considerați un triunghi ABC, alegeți pe fiecare din laturi cîte o unitate de măsură și un sens, considerați o paralelă la BC și exprimați teorema fundamentală a asemănării folosind numai măsuri de segmente orientate.

5. Considerați două drepte paralele, două puncte A și B pe prima și două puncte C și D pe a doua, și unități de măsură și sensuri pe una din cele două drepte paralele și pe AC. Considerați un punct M pe AC și intersecția N între paralela prin M la cele două drepte și BD. Exprimați $y = \overrightarrow{MN}$ în funcție de $x = \overrightarrow{AM}$.

6. Fie A', B', C', G' picioarele perpendicularelor din vîrfurile A, B, C ale unui triunghi și din punctul G de intersecție al medianelor sale pe o dreaptă d.

Exprimați $\overrightarrow{GG'}$ cunoscînd $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$; $\overrightarrow{CC'}$.

Vectori

Cele arătate în paragraful precedent ne conduc la:

Definiția. **Fie $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ două segmente orientate. Spunem că ele sînt echivalente în unul din următoarele două cazuri:**

1. $A = B$, $C = D$.
2. $A \neq B$, $C \neq D$ **și sînt îndeplinite simultan condițiile:**

a. $AB \parallel CD$ sau A, B, C, D **sînt coliniare**

b. $AB \equiv CD$.

c. **Semidreptele** AB **și** CD **au același sens.**

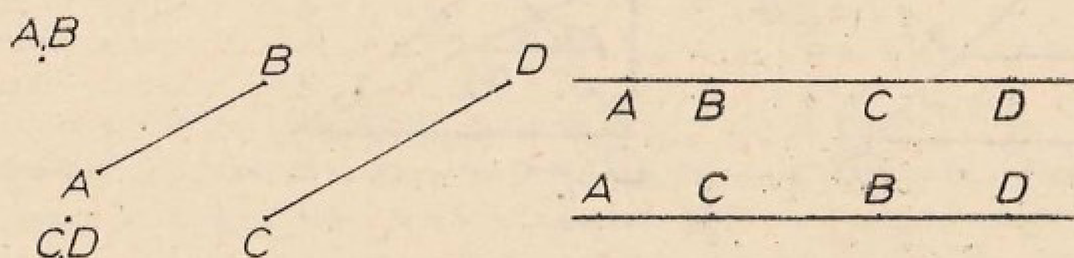


Fig. III.14

Să observăm că nu puteam impune condiția c atît timp cît n-ar fi fost impusă condiția a.

Orice segment orientat este echivalent cu el însuși; dacă un segment orientat este echivalent cu al doilea, atunci și acesta este echivalent cu primul; două segmente orientate echivalente cu al treilea sînt echivalente între ele.


Fig. III.15

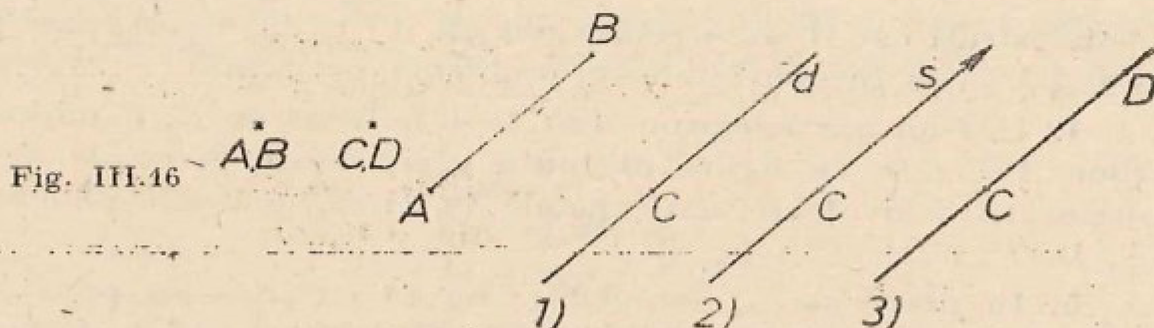
Definiție. **Se numește vector o mulțime formată din toate segmentele orientate echivalente cu un segment orientat dat.**

Vectorul format din toate segmentele orientate $\overrightarrow{AA}$ se va numi „vectorul nul".

În vorbirea curentă vom spune „vectorul $\overrightarrow{AB}$" în loc de „vectorul ce conține segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$" și vom spune deci că „vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ coincid", sau că „sînt egali", în loc de „segmentele orientate $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ sînt echivalente".

Să observăm că fiind date un segment orientat $\overrightarrow{AB}$ și un punct C, există un punct unic D astfel încît segmentul orientat $\overrightarrow{CD}$ să fie echivalent cu segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$.

Fig. III.16



Anume: dacă $B = A$, alegem $D = C$, iar dacă $B \neq A$ atunci ducem prin C dreapta d paralelă cu AB (dacă A, B, C sînt coliniare, d se alege drept AB), alegem pe ea semidreapta s, de origine C și de același sens cu semidreapta AB și, în fine, alegem pe s punctul D pentru care $CD \equiv AB$.

Pe scurt: orice vector se poate „așeza" astfel încît să aibă „originea" în orice punct dorim.

Problemă rezolvată

Dacă $\overrightarrow{AB}$ este echivalent cu $\overrightarrow{CD}$, demonstrați că $\overrightarrow{AC}$ este echivalent cu $\overrightarrow{BD}$.

Rezolvare. Cazul 1. A, B, C nu sînt coliniare.

Datorită faptului că semidreptele AB și CD au același sens, $ABDC$ este un patrulater. El este un paralelogram, deoarece laturile opuse AB, DC sînt paralele și congruente. Rezultă că și AC, DB sînt paralele și congruente; de asemenea, că semidreptele AC, BD au același sens. Cele trei fapte, împreună, afirmă, conform definiției, că $\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{BD}$ sînt echivalente.

Cazul 2. A, B, C coliniare. Atunci și D rezultă situat pe aceeași dreaptă cu A, B, C și următorul calcul cu măsuri de segmente orientate: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}$ ne convinge de valabilitatea enunțului și în acest caz.

Rezultatul din această problemă ușurează rezolvarea cîtorva din problemele ce urmează:

16. Probleme

1. Desenați două segmente orientate care să îndeplinească două din condițiile a, b, c și să nu o îndeplinească pe a treia. Din cele trei variante ale acestei probleme, care este „absurdă"?

2. Fie A, B, C trei puncte necoliniare. Convingeți-vă că există un punct unic D astfel încît $ABCD$ să fie un paralelogram. Caracterizați-l „vectorial" în două moduri.

3. Dacă AB este echivalent cu $\overrightarrow{A'B'}$ și $\overrightarrow{BC}$ este echivalent cu $\overrightarrow{B'C'}$, demonstrați că $\overrightarrow{AC}$ este echivalent cu $\overrightarrow{A'C'}$ (direct este mai greu decît s-ar părea la început; folosiți problema rezolvată).

4. Într-un paralelogram $ABCD$ se notează cu E, F mijloacele laturilor AB, CD. În figura obținută găsiți toate perechile de segmente orientate echivalente, cu capetele în cîte două din punctele A, B, C, D, E, F.

5. În problema 4, completați figura cu încă un punct, situat pe una din dreptele AB, BC, CD, DA așa încît să putem forma cu el un segment orientat echivalent cu $\overrightarrow{AC}$. În cîte moduri puteți face aceasta?

6. Un triunghi echilateral ABC are „centrul" în O. „Așezați" vectorul OA cu originea în B, apoi în C. Precizați în fiecare din cele două cazuri poziția „extremității" vectorului.

7. Indicați perechi de segmente orientate echivalente pe figura formată dintr-un triunghi și mijloacele laturilor sale.

UNGHIURI ORIENTATE

Acest paragraf este asemănător ca idee celor privind segmentele orientate de pe aceeași dreaptă și de pe drepte paralele; aci însă situația nu ne conduce la noțiuni ce au complexitatea noțiunii de vector.

Dacă privim foaia de hîrtie „de deasupra", așa cum facem de obicei, atunci, relativ la orice semidreaptă, unul din semiplanele determinate de dreapta pe care ea este așezată ne apare „la stînga" semidreptei, iar celălalt „la dreapta" semidreptei.

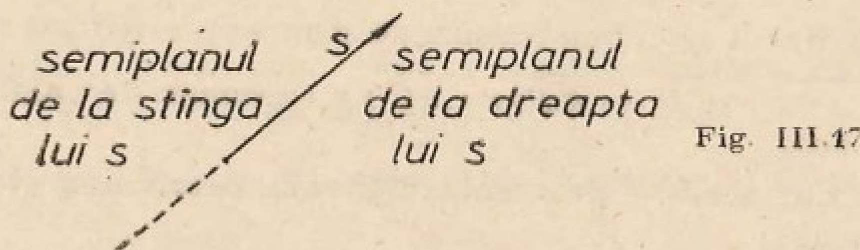


Fig. III.17

Dacă însă am „întoarce foaia" și aceasta ar fi transparentă (ar fi mai greu să realizăm aceasta privind-o „de dedesubt"), situația s-ar schimba: semiplanul ce apărea „la stînga" semidreptei ar apărea acum „la dreapta" ei și invers.

În cele ce urmează vom presupune că „ne-am fixat poziția" din care privim planul și deci că am precizat, pentru orice semidreaptă, care este semiplanul de la stînga ei și care este cel de la dreapta ei.

În legătură cu aceasta, sînt valabile următoarele *proprietăți:*

a. Dacă două semidrepte s și t au aceeași origine și dacă t este situată în semiplanul de la stînga lui s, atunci s este situată în semiplanul de la dreapta lui t.

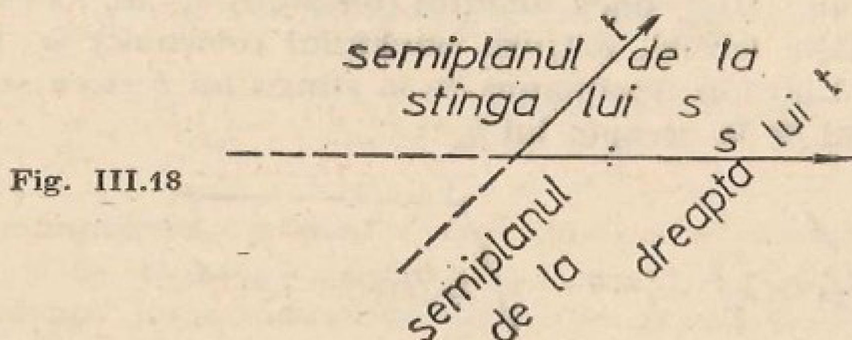


Fig. III.18

b. Dacă s și s' sînt cele două semidrepte diferite, cu originea în O situate pe dreapta d, atunci semiplanul de la stînga lui s este tot una cu semiplanul de la dreapta lui s'.

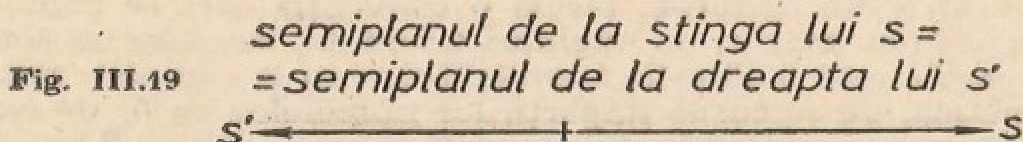


Fig. III.19

c. Dacă Ox, $O'x'$ sînt semidrepte paralele de același sens, dacă Oy, $O'y'$ sînt de asemenea două semidrepte paralele de același sens și dacă Oy este situată în semiplanul de la stînga lui Ox, atunci $O'y'$ este situată în semiplanul de la stînga lui $O'x'$.

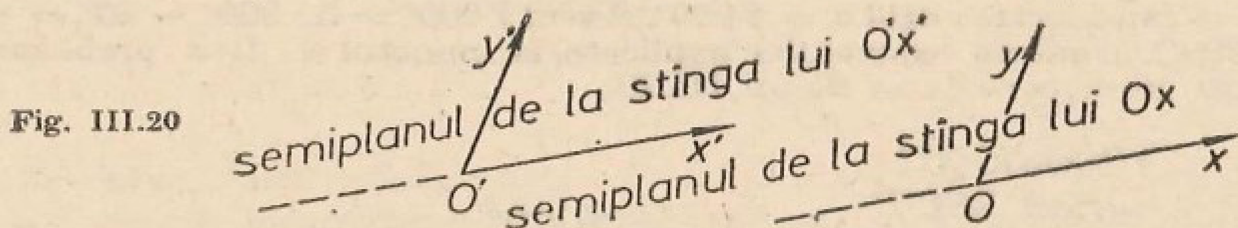


Fig. III.20

Observație. Am prezentat noțiunile din acest paragraf, ca și din cel asupra semidreptelor de același sens și de sensuri contrarii, la nivelul intuitiv, la fel ca în partea I din cl. a VI-a.

Definiție. Prin unghi orientat vom înțelege o figură formată din două semidrepte h, k cu aceeași origine, nu neapărat diferite, considerate în această ordine. Îl vom nota $\measuredangle(h, k)$.

Deci: $\measuredangle(h, k)$ este și el un unghi orientat, iar, pentru $h \neq k$, unghiul orientat $\measuredangle(h, k)$ este diferit de unghiul orientat $\measuredangle(k, h)$.

Definiție. Prin măsura unui unghi orientat $\measuredangle(h, k)$ notată tot cu $\measuredangle(h, k)$ vom înțelege.

a. $0°$ = **dacă** $h = k$.

b. $+180°$ **sau** $-180°$ **dacă unghiul (obișnuit)** $\measuredangle(h, k)$ **este alungit.**

c. **În celelalte cazuri, măsura unghiului (obișnuit)** $\measuredangle(h, k)$, **luată cu semnul** $+$ **dacă** k **este în semiplanul de la stînga lui** h **și cu semnul — dacă** k **este în semiplanul de la dreapta lui** h.

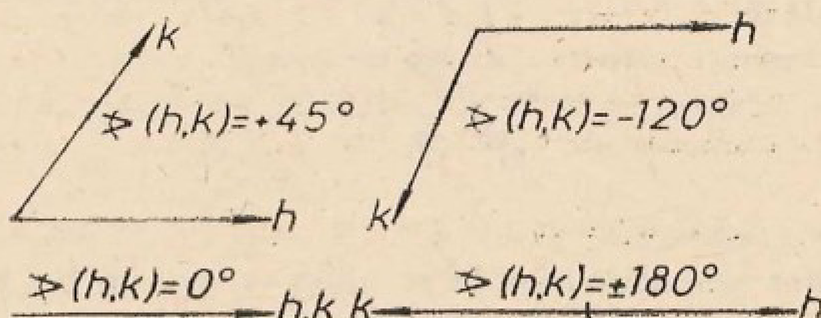


Fig. III.21

Observații. 1. Convenția de la *c* în legătură cu semiplanele n-avea sens în cazurile *a* și *b*; de aceea a trebuit să le considerăm separat.

2. În cazul *b* din definiție, facem o convenție care se poate enunța și astfel: în calculele cu măsuri de unghiuri orientate, considerăm totdeauna că $360° = 0°$. Aceasta este o situație asemănătoare cu cea în care sîntem interesați, în aritmetică, de resturile împărțirilor numerelor cu 4, de exemplu. În studiul acestor resturi scriem $4 = 0 \pmod 4$ și nu $4 = 0$, $+2 = -2 \pmod 4$ și nu $+2 = -2$. Aci vom scrie de exemplu, $+180° = -180° \pmod{360°}$.

Reamintim că $a = b \pmod c$, unde a, b, c sînt numere întregi, înseamnă: c divide pe $a - b$. În cazul nostru $u = v \pmod{360°}$ înseamnă: cîtul $\frac{u - v}{360}$ este un număr întreg.

3. Oricare ar fi o măsură de unghi u și o semidreaptă h, există o semidreaptă unică k, cu aceeași origine ca și h, astfel încît $\measuredangle(h, k) = u \pmod{360°}$.

Dacă pentru $-180° \leq u \leq 180°$ aceasta se poate înțelege din figura III.21, să considerăm cazul $u = 1\,000°$. Avem $1\,000° = 3 \cdot 360° - 80° = -80° \pmod{360°}$, conform convenției explicate la punctul 2. Deci problema, în acest caz, se rezolvă ca în figura III.22.

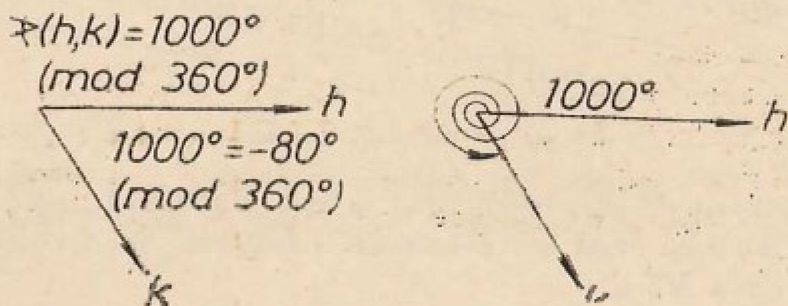


Fig. III.22

Un caz mai familiar este $u = 280°$, de exemplu, în care scriem $u = 360° - 80° \equiv -80°$ (mod $360°$) și care se rezolvă deci tot „prin figura III.22".

4. Dacă privim planul „din partea cealaltă" atunci măsurile tuturor unghiurilor orientate apar cu semnele schimbate.

Următoarea teoremă are aceeași importanță ca și cea asemănătoare de la segmente orientate de pe aceeași dreaptă: permite calcule și demonstrații fără a mai face figura, fără a mai considera toate cazurile ce pot apărea ca urmare a pozițiilor diferitelor semidrepte unele față de altele. Bineînțeles că în demonstrația ei va trebui să considerăm toate aceste cazuri, cu toată „hărnicia".

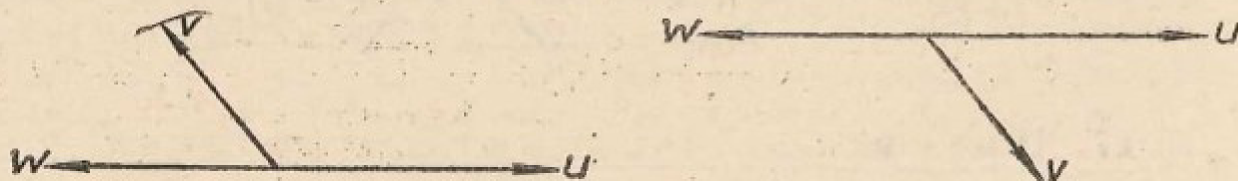
Teoremă. Dacă u, v, w sînt trei semidrepte cu aceeași origine, atunci $\measuredangle(u, w) \equiv \measuredangle(u, v) + \measuredangle(v, w)$ (mod $360°$).

Demonstrație. Cazul 1. $u = v$ sau $v = w$. În acest caz relația este evidentă, unul din numerele din partea dreaptă fiind $0°$... .

Cazul 2. $u = w$. Relația se reduce la $\measuredangle(u, v) = -\measuredangle(v, u)$; ea rezultă din definiția măsurii unghiului orientat și din proprietatea *a*, ilustrată în figura III.18.

Cazul 3. Unghiul $\measuredangle(u, w)$ este alungit, iar celelalte două nu sînt nule.

Fig. III.23

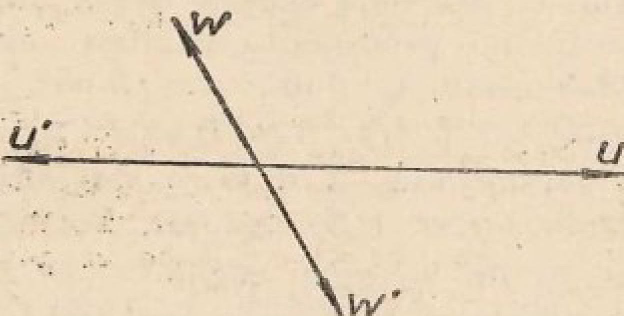


În ambele situații, relația rezultă din $\measuredangle(u, v) + \measuredangle(v, w) = 180°$.

Cazul 4. Unghiul $\measuredangle(u, w)$ nu este nici alungit nici nul.

Privind eventual „din partea cealaltă", putem presupune că w se află în semiplanul de la stînga lui u. Să notăm cu u' și w' semidreptele ce „prelungesc" pe u și w.

Fig. III.24



Deosebim patru subcazuri.

a) v se află în interiorul $\measuredangle(u, w)$ (fig. III.25, a). În acest caz relația este $\measuredangle(u, w) = \measuredangle(u, v) + \measuredangle(v, w)$, despre care știm că este adevărată.

b) v se află în interiorul $\measuredangle(w, u')$ sau coincide cu u'. În acest caz relația este $\measuredangle(u, w) = \measuredangle(u, v) - \measuredangle(v, w)$, despre care știm că este adevărată (situație asemănătoare cu *a*).

c) v se află în interiorul $\sphericalangle(u, w')$ sau coincide cu w'. În mod asemănător cu b) ajungem la $\sphericalangle(u, w) = \sphericalangle(v, w) - \sphericalangle(u, v)$.

d) v se află în interiorul $\sphericalangle(u', w')$. Aici apare situația deosebită legată de convenția de mai sus. Relația devine $\sphericalangle(u, w) = -\sphericalangle(u, v) - \sphericalangle(v, w)$ (mod 360°). Știm de la „unghiuri în jurul unui punct" că $\sphericalangle(u, v) + \sphericalangle(v, w) + \sphericalangle(w, u) = 360°$; aceasta arată că diferența dintre membrul întîi și al 2-lea al relației, împărțită la 360°, dă rezultatul 1. Cu aceasta teorema este demonstrată.

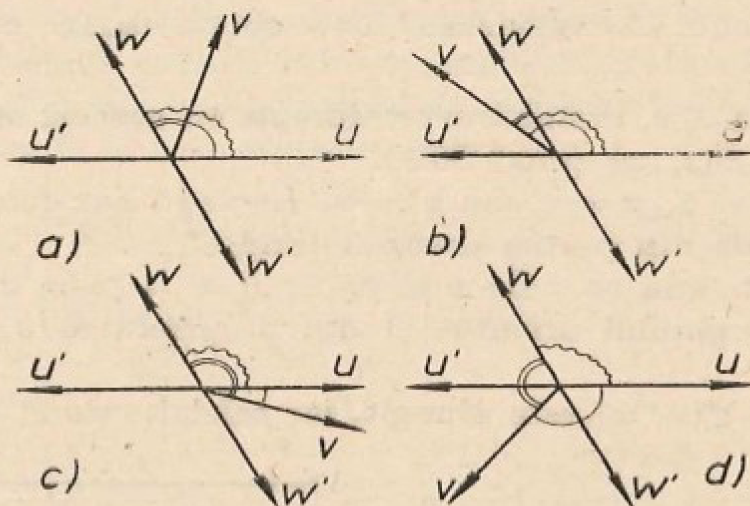


Fig. III.25

17. Probleme

1. Considerați un triunghi ABC. Convingeți-vă că sau pentru toate cele trei semidrepte AB, BC, CA „vîrful rămas" se află în semiplanul de la stînga, sau el se află în semiplanul de la dreapta pentru toate. Enunțați teorema asupra sumei unghiurilor unui triunghi considerînd unghiuri orientate.

2. Arătați că teorema asupra sumei unghiurilor unui triunghi obținută în problema precedentă rămîne valabilă și pentru trei puncte coliniare (dar distincte două cîte două).

3. Desenați un pătrat $ABCD$ astfel încît C și D să fie în semiplanul din stînga semidreptei AB. Care sînt măsurile unghiurilor orientate $\sphericalangle(AB, AC)$, $\sphericalangle(CB, CD)$, $\sphericalangle(DB, DA)$, $\sphericalangle(AD, AB)$, etc.?

4. Desenați un hexagon regulat $ABCDEF$ astfel încît C, D, E, F, să se afle în semiplanul din dreapta semidreptei AB. Care sînt măsurile unghiurilor orientate $\sphericalangle(BC, BA)$, $\sphericalangle(CD, CA)$, $\sphericalangle(FC, FB)$, $\sphericalangle(EA, ED)$ etc.?

5. Se dau două drepte a, b concurente în O și pe fiecare se alege cîte o semidreaptă a', b' cu originea în O. Cîte valori poate lua măsura unghiului orientat $\sphericalangle(a', b')$ (prima semidreaptă fiind cea de pe a)? Arătați că $2\sphericalangle(a', b')$ ia aceeași valoare în toate cazurile descrise.

6. Se dau două semidrepte h, k de origine O. Cîte semidrepte b de origine O există astfel ca $\measuredangle(h, b) = \measuredangle(b, k)$? Dar astfel ca $\measuredangle(h, b) = -\measuredangle(b, k)$?

7. Oricum ar fi punctele A, B, C, D diferite două cîte două, avem $\measuredangle(AD, AB) + \measuredangle(BA, BC) + \measuredangle(CB, CD) + \measuredangle(DC, DA) = 0°$. Demonstraţi aceasta în general şi apoi consideraţi cazuri speciale ca exemple: patrulater convex, concav, există un punct comun interioarelor segmentelor AB, CD etc.

8. Fie $\bar{O}$, $\bar{A}$ două puncte pe o dreaptă d, fie B alt punct în plan şi C simetricul lui B faţă de d. Avem $\measuredangle(OB, OA) = -\measuredangle(OA, OC)$.

DESPRE TRANSFORMĂRI GEOMETRICE

Obişnuim să gîndim că două triunghiuri (sau, mai general, două figuri geometrice, deşi nu am discutat acest caz pînă acum) sînt congruente dacă, desenînd una din ele pe o hîrtie transparentă, putem să le facem să coincidă prin suprapunere. Ne-am ferit pînă acum de astfel de „argumente" în raţionamentele noastre. În acest paragraf vom da o expresie matematică precisă a noţiunii de suprapunere, sau, cum se obişnuieşte a i se spune, de izometrie.

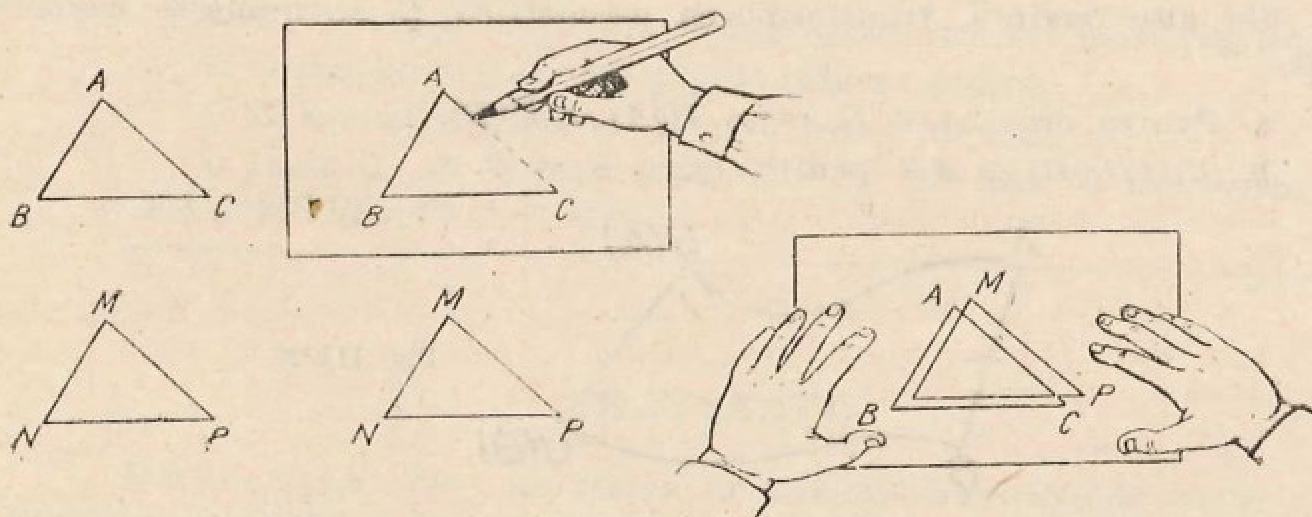


Fig. III.26

Din punct de vedere geometric, o „suprapunere" apare drept un procedeu de a considera, odată cu fiecare punct P, punctul Q bine determinat pentru o suprapunere dată, în care este „mutat" P.

Dar aceasta nu este altceva decît „o funcţie definită pe plan, cu valori în plan".

D e f i n i ţ i e. Se numeşte transformare geometrică o funcţie $U : \pi \to \pi$ unde π este planul, gîndit ca mulţimea punctelor sale, cu alte cuvinte o transformare geometrică este o funcţie definită pe plan cu valori în plan.

Altfel spus, o transformare geometrică este un mod de a atașa fiecărui punct P din plan un punct bine determinat, care depinde de P, notat $U(P)$, din plan.

Dar nu orice transformare geometrică apare drept ceea ce gîndim noi a fi o suprapunere. De exemplu, în figura III.27, să definim $U(P) = A_-$ dacă

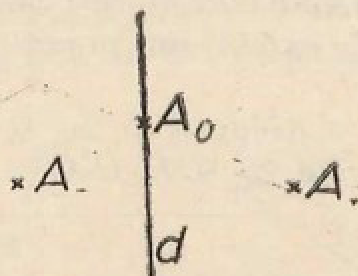


Fig. III.27

P este în semiplanul din stînga, $U(P) = A_0$ dacă P este pe dreapta din figură și $U(P) = A_+$ dacă P este în semiplanul din dreapta. Prin această transformare geometrică U planul este „strivit" în cele trei puncte A_-, A_0, A_+. Aceasta nu este o suprapunere; o suprapunere nu modifică distanțele între puncte.

D e f i n i ț i e. Se numește izometrie o transformare geometrică ce duce puncte diferite în puncte diferite și care duce orice segment într-unul congruent cu el.

Cu alte cuvinte, transformarea geometrică U se numește izometrie dacă:

a. Pentru orice $A \neq B$ avem $U(A) \neq U(B)$.

b. $U(A)U(B) \equiv AB$ pentru orice $A \neq B$.

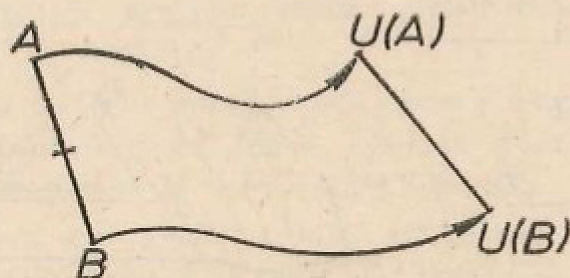
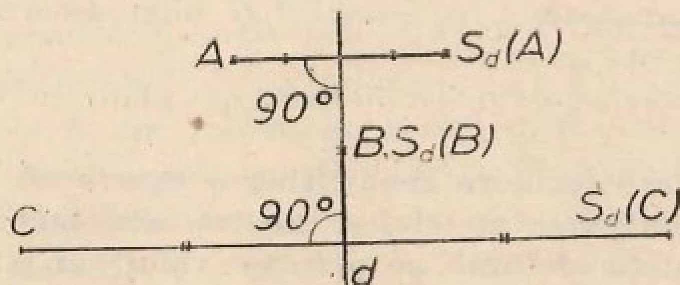


Fig. III.28

Exemple. Am văzut în clasa a 6-a că simetria față de o dreaptă d, pe care o vom nota cu S_d, este o izometrie.



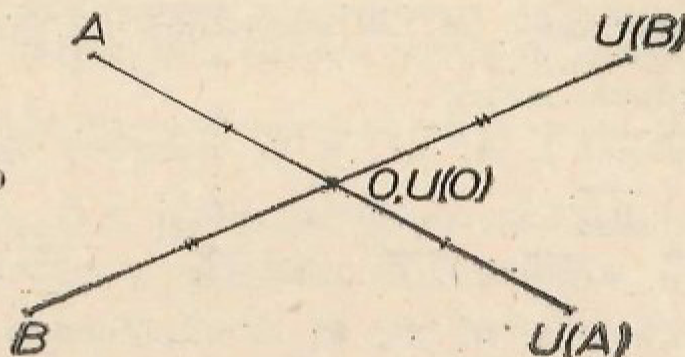
$AC \equiv S_d(A)S_d(C)$
$AB \equiv S_d(A)S_d(B)$
etc.

Fig. III.29

Am văzut de asemenea că simetria față de un punct O, pentru care vom introduce o notație la pag. 102, este o izometrie.

$U(A)U(B) \equiv AB$
$AO \equiv U(A)U(O)$
etc.

Fig. III.30



18. Probleme

1. Dacă U este o izometrie și ABC este un triunghi echilateral, atunci $U(A)U(B)U(C)$ este un triunghi echilateral.

2. Dacă U este o izometrie și A, B, C sînt puncte coliniare, atunci $U(A)$, $U(B)$, $U(C)$ sînt coliniare.

3. O izometrie duce un triunghi într-un triunghi congruent cu el.

4. O izometrie U duce interiorul segmentului AB în interiorul segmentului $U(A)U(B)$.

5. O izometrie duce un paralelogram într-un paralelogram.

6. O izometrie duce un pătrat într-un pătrat.

7. O izometrie duce o dreaptă într-o dreaptă.

8. Dacă A, B, C sînt necoliniare și U este o izometrie, atunci $\sphericalangle U(A)U(B)U(C) \equiv \sphericalangle ABC$.

TRANSLAȚII

Definiție. Fie v un vector. Se numește translație de vector v, transformarea geometrică T_v care duce un punct P în extremitatea vectorului v, „așezat" cu originea în P.

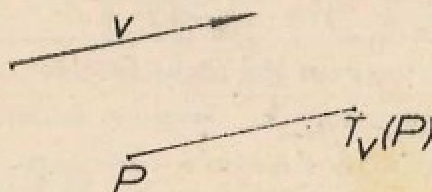


Fig. III.31

Observație. Translația de vector nul este așa-numita transformare identică, transformare ce lasă pe loc toate punctele P. Ea se va nota cu I.

Teoremă. Orice translație este o izometrie.

Demonstrație. Fie A și B două puncte oarecare, A' și B' imaginile lor prin translația considerată. Segmentele orientate $\overrightarrow{AA'}$ și $\overrightarrow{BB'}$ vor fi deci echivalente, deoarece ambele „fac parte" din vectorul translației. Vom deosebi două cazuri.

Cazul 1. A, A', B, B' coliniare. În acest caz ipoteza se poate scrie $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ și concluzia $AB = A'B'$ rezultă din $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$.

Cazul 2. A, A', B, B' necoliniare.

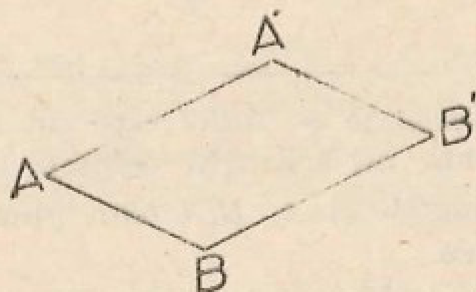


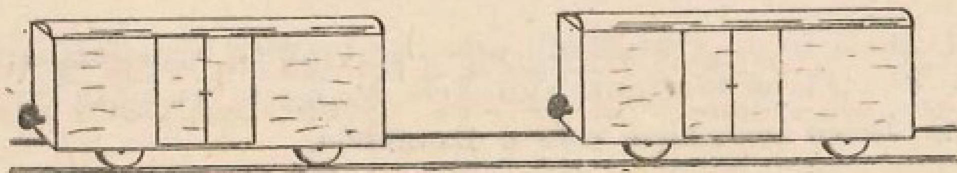
Fig. III.32

Ipoteza	*Concluzia*
$AA' \parallel BB'$, $AA' \equiv BB'$	$AB \equiv A'B'$
Semidreapta AA' de același sens cu semidreapta BB'.	

În acest caz începem prin a observa că $AA'B'B$ este un patrulater (adică nu arată așa [A A' B' B]) ca urmare a părților 1 și 3 ale ipotezei. Avînd laturile opuse AA' și BB' paralele și congruente el este paralelogram. Rezultă $AB \equiv A'B'$ ca opuse în acest paralelogram (pentru a evita folosirea, ca mai sus, a unei teoreme „suplimentare" din clasa a 6-a, se poate arăta că $\Delta ABA' \equiv \Delta B'A'B$, cazul 1).

Observație. Fie T o translație. Cunoscînd imaginea $T(P_0)$ prin această translație a unui singur punct P_0, translația T este perfect determinată: ea este translația de vector $\overrightarrow{P_0T(P_0)}$.

Intuitiv, un vagon de cale ferată, pe o porțiune dreaptă de linie, execută o translație (poziția sa, la fiecare moment fixat, se obține printr-o anumită translație, ce depinde de acel moment, din poziția inițială (fig. III.33).


Fig. III.33

19. Probleme

1. O translație duce un cerc într-un cerc.

2. Două cercuri de raze egale pot totdeauna să fie „suprapuse" printr-o translație.

3. O translație duce o dreaptă d într-o dreaptă paralelă cu ea, sau tot în d.

4. Singurele drepte transformate în ele însele de o translație de vector nenul T_v sînt cele „paralele" cu vectorul v al translației.

5. Se consideră două cercuri și un segment. Să se construiască un punct M pe primul cerc și un punct N pe al doilea așa încît segmentul MN să fie congruent și paralel cu segmentul dat.

6. Aceeași problemă ca la 5 înlocuind unul din cercuri cu o dreaptă.

7. Se consideră un pătrat $ABCD$ de centru O. Fie M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA. Să se precizeze pozițiile punctelor $T_{\overrightarrow{AO}}(M)$, $T_{\overrightarrow{AO}}(N)$, $T_{\overrightarrow{AO}}(P)$, $T_{\overrightarrow{AO}}(Q)$.

8. Se consideră un hexagon regulat $ABCDEF$, de centru O. Să se precizeze imaginile vîrfurilor sale prin translația de vector $\overrightarrow{AO}$. Aceeași problemă pentru translația de vector $\overrightarrow{OB}$. La fel pentru cea de vector $\overrightarrow{AC}$.

9. O translație transformă o semidreaptă într-o semidreaptă paralelă și de același sens cu ea.

10. O translație transformă un segment orientat într-unul echivalent cu el.

11. O translație transformă un unghi orientat într-unul de aceeași măsură.

12. Poate o translație de vector nenul să transforme un poligon în el însuși?

13. Dați exemplu de o figură care să fie transformată în ea însăși de o translație de vector nenul.

14. Arătați că o transformare geometrică ce transformă orice segment orientat într-unul echivalent cu el este o translație.

ROTAȚII

Definiție. Fie C un punct fixat și u o măsură de unghi orientat. **Rotația de centru C și unghi orientat u se definește drept transformarea geome-**

trică $R_{C,u}$ ce duce C în C iar un punct $P \neq C$ într-un punct $Q = R_{C,u}(P)$ definit prin $\sphericalangle(CP, CQ) = u$, $CQ \equiv CP$.

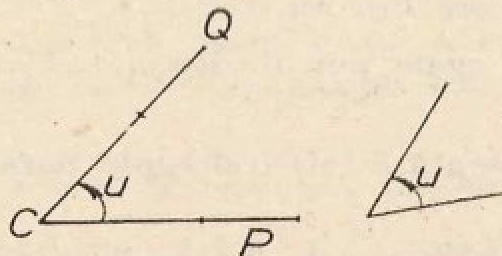


Fig. III.34

Observații. 1. Rotația $R_{C,0^\circ}$ de unghi nul este transformarea identică I.

2. Rotația $R_{C,\pm 180^\circ}$ de unghi orientat 180° este tocmai simetria față de C.

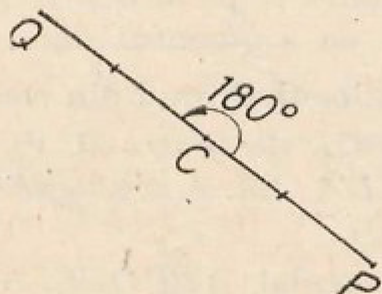


Fig. III.35

T e o r e m ă. Orice rotație $R_{C,u}$ este o izometrie.

Demonstrație. Va trebui să alegem două puncte oarecare M, N să notăm $M' = R_{C,u}(M)$, $N' = R_{C,u}(N)$ și să demonstrăm că $M'N' \equiv MN$.

Cazul „general" C, M, N necoliniare.

Ipoteza.	*Concluzia.*
$CM \equiv CM', CN \equiv CN'$,	$M'N' = MN$
$\sphericalangle(CM, CM') = \sphericalangle(CN, CN')\ (=u)$	

Demonstrația în acest caz. Avem $\sphericalangle(CM, CN) = \sphericalangle(CM, CM' + \sphericalangle(CM', CN) = \sphericalangle(CM, CM') + \sphericalangle(CM', CN') + \sphericalangle(CN', CN) = \sphericalangle(CN, CN') + \sphericalangle(CN'\ CN) + \sphericalangle(CM', CN'), = \sphericalangle(CM', CN')$, deci $\sphericalangle MCN \equiv \sphericalangle M'CN'$. Rezultă $\triangle MCN \equiv \triangle M'CN'$ (cazul 1) și deci $M'N' \equiv MN$.

Cazul „special" C, M, N coliniare.

Subcazul $C = M$ sau $C = N$ rezultă imediat din definiție: $CN \equiv CN'$....

Subcazul $C \neq M$, $C \neq N$. Din demonstrația de la cazul general rezultă $\sphericalangle(CM, CN) = \sphericalangle(CM', CN')$, valoarea lor fiind în cazul de față 0° sau 180°. Deci dacă semidreptele CM, CN sînt de același sens, așa sînt și semidreptele CM', CN', iar dacă CM, CN sînt de sensuri contrare, așa sînt și CM', CN'.

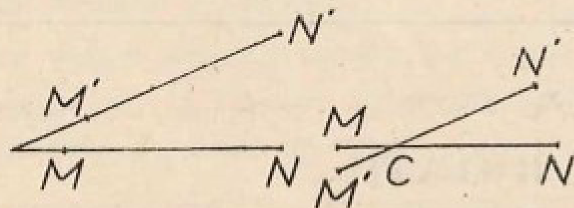


Fig. III.36

În prima situație avem $M'N' = |CM' - CN'| = |CM - CN| = MN$, iar în a doua $M'N' = CM' + CN' = CM + CN = MN$, q.e.d.

Un carusel execută o rotație (cu aceeași precizare ca și la mișcarea vagonului de cale ferată pag. 100).

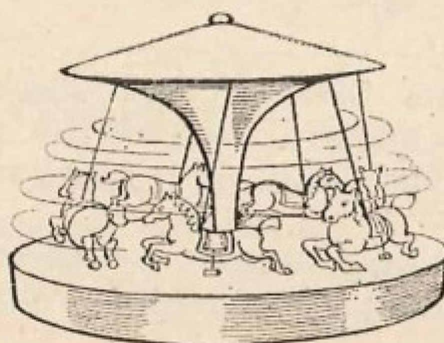


Fig. III.37

20. Probleme

1. O rotație duce un cerc într-un cerc. În ce caz o rotație dată duce un cerc dat în el însuși?

2. Două cercuri de raze egale pot fi „suprapuse" printr-o rotație, al cărei unghi orientat poate fi ales cum dorim. $\neq 0°$.

3. O rotație transformă o dreaptă într-o dreaptă. Poate fi dreapta imagine paralelă cu cea inițială? Dar identică? Descrieți cazurile în care au loc aceste situații.

4. O rotație transformă o semidreaptă într-o semidreaptă. În cazurile, precizate prin soluția problemei 3, în care se poate pune problema dacă semidreapta imagine este de același sens sau nu cu semidreapta inițială, precizați care este situația.

5. Să se construiască un triunghi echilateral cu un vîrf dat și cu celelalte două vîrfuri situate pe două drepte date. Descrieți situația în care problema are o infinitate de soluții.

6. Să se contruiască un pătrat ce are două vîrfuri opuse pe două cercuri date, iar unul din celelalte două într-un punct dat.

7. Care sînt rotațiile care duc un triunghi echilateral în el însuși?

8. Aceeași problemă pentru un pătrat.

9. Aceeași problemă pentru un hexagon regulat.

10. Se consideră un hexagon regulat $ABCDEF$ și figura H formată din trei cercuri de rază $\frac{1}{3}AB$ de centre A, C, E și din trei cercuri de rază $\frac{1}{4}AB$ de centre B, D, F. Care sînt rotațiile ce transformă figura H în ea însăși?

11. Se consideră un pătrat $ABCD$ în care C, D sînt în semiplanul din stînga semidreptei AB. Precizați imaginile vîrfurilor pătratului prin rotația $R_{A,+45°}$.

12. Se consideră un hexagon regulat $ABCDEF$, în care C este în semiplanul de la stînga semidreptei AB. Precizați imaginile vîrfurilor sale prin rotațiile $R_{A,+60°}$. Aceeași problemă pentru $R_{A,-60°}$.

13. C și D fiind puncte diferite, determinați un punct X astfel ca $R_{C,+60°}(X) = R_{D,-60°}(X)$. Aceeași problemă înlocuind $-60°$ cu $+120°$. La fel cu $+60°$, $+60°$.

Problema rezolvată. Dîndu-se trei drepte paralele (fixate) să se construiască un triunghi echilateral cu vîrfurile respectiv pe fiecare dintre ele.

Observație: dacă există unul, prin translație de-a lungul dreptelor putem obține o infinitate.

SOLUȚIA 1 (folosind numai cunoștințe de clasa a 6-a). Sînt date dreptele a, b, c (fig. III.38). Considerăm problema rezolvată.

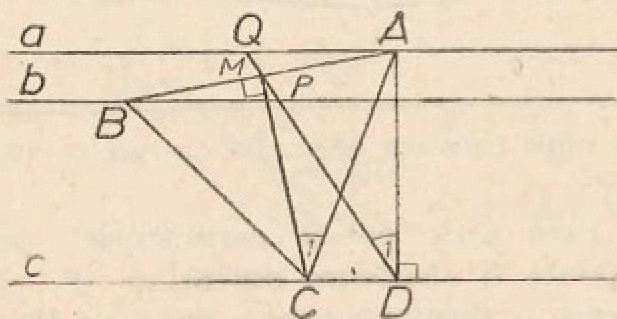


Fig. III.38

Ducem (notațiile sînt cele din figura) $AD \perp c$ și CM înălțimea triunghiului care taie segmentul AB în M, mijlocul său, Patrulaterul $ADCM$ este inscriptibil $\sphericalangle ADC = \sphericalangle AMC = 90°$. Deci $D_1, = C_1 = 30°$. M este de asemenea și mijlocul segmentului PQ (P și Q sînt punctele unde DM taie pe b, respectiv a). Problema este terminată: ducem $AD \perp c$, $ADQ = 30°$, luăm mijlocul segmentului PQ. Unim A cu M și prelungim pînă taie b în B. AB este latura triunghiului căutat.

SOLUȚIA 2 (prin asemănare). Dacă distanța dintre a și b este m, cea dintre b și c este n, latura AC este împărțită în raportul m/n. Cum toate triunghiurile echilaterale sînt asemenea, luăm un triunghi echilateral $A'B'C'$ și îi împărțim latura $A'C'$ în raportul m/n prin punctul interior N' (fig. III. 39). Ducem prin A' și B' paralele a' și b' la $B'N'$ și obținem o figură „asemenea" cu cea căutată. Fie d' distanța dintre a' și c'. Prin procedeul construirii celei

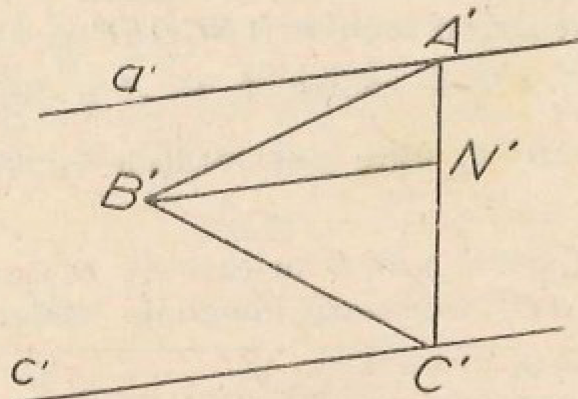


Fig. III.39

„de a patra proporționale", cunoscînd distanța d dintre dreptele a și c, obținem latura AC a triunghiului ABC căutat.

SOLUȚIA 3 (prin rotație). Rotind pe A în jurul lui B cu 60° „ajungem" în C. Deci rotind dreapta a în jurul unui punct fixat la început B pe b, obținem acolo unde „rotita" lui a taie c, punctul C, deci avem latura BC a triunghiului.

PROBLEME RECAPITULATIVE

1. În triunghiul ABC, latura $BC = 5$ cm, medianele $BB' = 6$ cm și $CC' = 4{,}5$ cm. Să se afle celelalte laturi ale triunghiului.

2. Trapezul isoscel $ABCD$ este circumscris unui cerc. El are AB, baza mică, de 2 cm și baza mare $CD = 8$ cm. Se cere raza cercului înscris și laturile neparalele.

3. Într-un triunghi isoscel OAB $(OA \equiv OB)$ $\sphericalangle AOB = 36$ °. Luăm pe latura OB punctul C interior, astfel încît $\widehat{CAB} = 36°$. Să se demonstreze că:

a) $\triangle ACB \sim \triangle OAB$,

b) $OC \equiv AB \equiv AC$.

4. Într-un cerc de centru O înscriem un poligon regulat cu 10 laturi (decagon regulat). Fie AB, BE și EF trei laturi ale sale consecutive. AF se intersectează cu OB în C. Notînd $AB = BE = EF = l$, $OA = OB = R$ demonstrați că

a) $CB = R - l$;

b) $OC \equiv AC \equiv l$;

c) $R(R - l) = l^2$ sau $l^2 + Rl - R^2 = 0$;

d) Verificați relația $l^2 + Rl - R^2 = \left(l + \frac{R + R\sqrt{5}}{2}\right)\left(l + \frac{R - R\sqrt{5}}{2}\right)$ și găsiți de aici latura decagonului regulat convex în funcție de raza cercului înscris.

5. În trapezul dreptunghic $ABCD$, înălțimea $BC = 4$ cm, baza mică $AB \equiv AD = x$, iar baza mare $CD = 8$ cm. Determinați x, măsura bazei mici și laturii AD.

6. În figura R.1 cercurile de centru O_1, O_2, O_3 și rază R_1, R_2, R_3 sînt tangente la dreptele VT, VT' și tangente exterioare între ele.

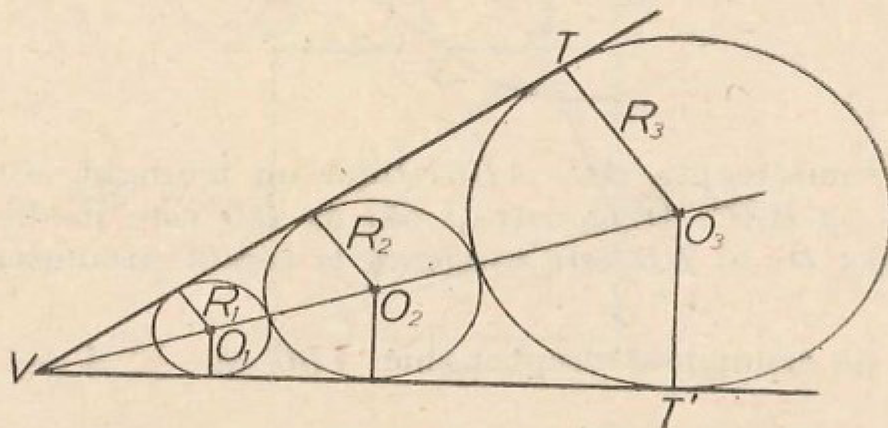


Fig. R.1

Demonstrați că aria cercului (O_2) este media proporțională între cea a cercurilor (O_1) și (O_3).

7. Printr-un punct fix P situat în interiorul cercului fix de centru $O(O \neq P)$ trec coardele perpendiculare mobile AB, CD de mijloace M şi N respectiv.

Să se demonstreze că MN are mărime constantă.

8. În cercul de centru O, A şi B sînt două puncte diametral opuse. Fie M şi N două puncte variabile pe cerc, astfel încît $\widehat{MAN} = 50°$. Dreptele MB şi AN se întîlnesc în P.

a) Cîte grade are $\measuredangle MPA$?

b) Care este locul geometric al punctului P?

9. În triunghiul ABC, $\measuredangle BAC = 60°$, BD şi CE sînt înălţimi, iar O este mijlocul segmentului BC.

a) Să se demonstreze că: $\triangle OED$ este echilateral.

b) Dacă $AC = 4$ cm şi AB este de mărime variabilă, să se găsească valoarea minimă a laturii triunghiului echilateral OED.

10. Să se determine care este dreptunghiul de arie maximă înscris într-un cerc de rază 1.

11. În triunghiul isoscel ABC este înscris un cerc. Laturile $AB \equiv AC = 13$ cm, iar baza $BC = 10$ cm. Să se calculeze raza cercului înscris.

12. Se dă un cerc şi A un punct exterior. Ducem AT şi AS tangente la cerc (fig. R.2). (S şi T sînt pe cerc). Coarda TL e paralelă cu AS. Segmentul AL taie a doua oară cercul în Q. Demonstraţi că TQ întîlneşte tangenta AS în M, mijlocul ei.

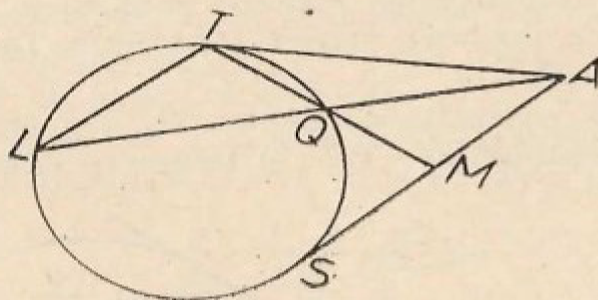


Fig. R.2

13. Pe semidreapta AC, ABC, fiind un triunghi, se ia D aşa încît $\measuredangle CBD \equiv \measuredangle BAC$. Demonstraţi că: a) BD este medie proporţională între AD şi CD; b) BD este tangentă la cercul circumscris triunghiului ABC.

14. Se dă triunghiul dreptunghic ABC cu $\measuredangle A = 90°$, $AB = 3$, $AC = 4$.

Să se găsească latura pătratului $AMNP$, unde $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in AC$. Catetele fiind b, c, aceeaşi întrebare.

15. În figura R.3, ABC este un triunghi oarecare, $ABDE$ și $ACFG$ pătrate. Să se demonstreze că: a) $EC \equiv BG$, b) $EP \perp PG$, c) AP este bisectoarea lui $\sphericalangle HAJ$.

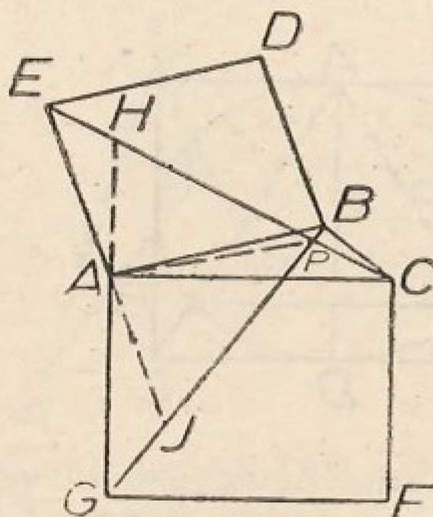


Fig. R.3

16. Un semicerc cu raza R este înscris într-un trapez isoscel (adică are centrul pe baza mare DC, și este tangent celorlalte laturi AB, BC și DA). Unghiul ADC format de o latură neparalelă cu baza mare are $45°$. Să se afle aria trapezului.

17. Să se afle aria unui trapez isoscel, știind că bazele sale sînt 12 și 20 cm, iar diagonalele sînt perpendiculare între ele.

18. Într-un pătrat $ABCD$ sînt înscrise două semicercuri cu diametre AD și BC. Un cerc mai mic este tangent la ambele semicercuri și la latura AB. Să se socotească raza acestui cerc în funcție de a, latura AB.

19. Segmentul $AB = a$, fix, este în același timp coardă și tangentă a două cercuri concentrice de rază variabilă. Să se demonstreze că aria coroanei circulare cuprinsă între ele este constantă.

20. În pătratul $ABCD$ de latură a (fig. R4) se înscrie triunghiul APQ cu $\sphericalangle QAP = 30°$, ($Q$ pe segmentul DC și P pe segmentul BC). $\sphericalangle APQ = 90°$. Se cer laturile acestui triunghi.

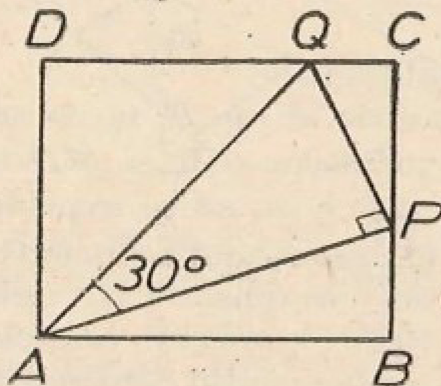


Fig. R.4

21. Se dă triunghiul ascuțit unghic ABC în care $CB = 3$ și înălțimea $AA' = 2$. Să se afle latura pătratului înscris în triunghi (două vîrfuri pe BC, celelalte două respectiv pe AB, AC).

22. În figura R.5 ABC este un triunghi isoscel înscris într-un pătrat ($AB = AC = a$) și pe înălțimea AD ca diametru se construiește un cerc care taie AB în M și AC în N. Se cere MN în funcție de a.

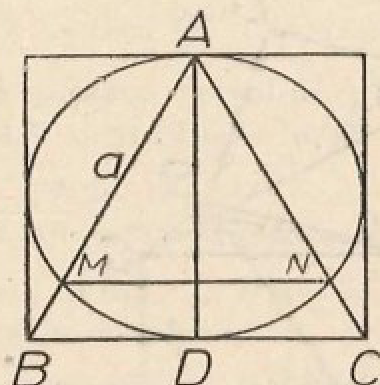


Fig. R.5

23. Demonstrați că orice figură plană care are două axe de simetrie perpendiculare are și un centru de simetrie! Reciproca este adevărată?

24. Cu laturile cît ale respectiv triunghiului echilateral, hexagonului regulat și pătratului înscris în același cerc, se construiește un triunghi. Să i se precizeze natura. Găsiți raza cercului circumscris lui.

25. Pe segmentul AB se consideră punctul M variabil și, de aceeași parte a segmentului, triunghiurile echilaterale AMC și MBD. Cercurile circumscrise acestor triunghiuri se taie în M și N (fig. R.6). Arătați că:

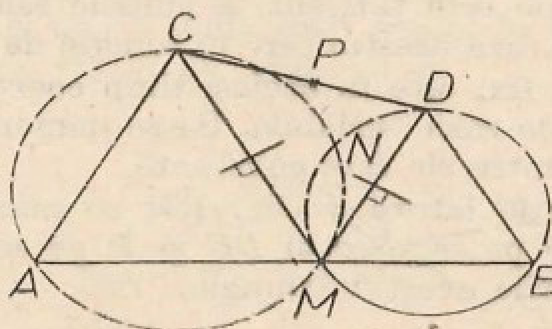


Fig. R.6

1) A, D, N sînt coliniare.

2) găsiți locul geometric al lui P, mijlocul lui CD, cînd M se mișcă.

3) mediatoarele segmentelor CM și MD trec printr-un punct fix.

4) dacă $AM = x$ și $AB = a$, să se exprime CD în funcție de a și x.

26. a) Să se arate că simetricul ortocentrului unui triunghi față de o latură se află pe cercul circumscris triunghiului.

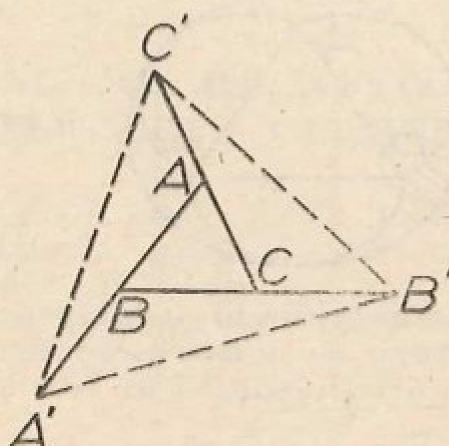
b) Să se construiască un triunghi cunoscînd: o înălțime, ortocentrul fixat pe ea și mărimea segmentului dintre ortocentru și alt vîrf.

27. Triunghiului ABC i se prelungesc laturile a, b, c cu segmentele $CB' = a$, $AC' = b$ și $BA' = c$, cum se vede în figura R.7. Se obține un nou triunghi $A'B'C'$. Dacă ștergem cu radiera triunghiul

inițial, rămîne numai triunghiul $A'B'C'$. Construiți din nou triunghiul ABC.

(Olimpiada R.F.G. 1977)

Fig. R.7



28. Un trapez isoscel cu baza mică $AB = 2a$ și baza mare $DC = 2b$, este circumscris unui cerc. Se cere aria trapezului.

29. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu diagonalele $AC = 3$, $BD = 4$

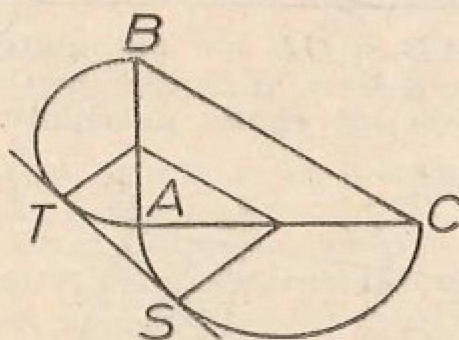
a) Fie M un punct pe AB, $MN \parallel BD$, $(N \in AD)$, $NP \parallel AC$ $(P \in CD)$, $PQ \parallel BD$, $(Q \in BC)$, $QM' \parallel AC$ $(M' \in AB)$. Demonstrați că M și M' coincid.

b) Calculați laturile lui $MNPQ$ în cazul în care el este romb.

30. Construiți un triunghi ABC cunoscînd raportul $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$, latura $BC = 4$ și raza cercului circumscris $R = 3$ cm.

31. În figura R.8 catetele $AB = 3$ cm și $AC = 4$ cm ale triunghiului dreptunghic ABC sînt diametrele a două semicercuri construite în afară. Să se calculeze tangenta TS comună acestora.

Fig. R.8



32. Se dă triunghiul ABC și un punct D mobil pe latura BC. Fie O și O' centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABD și ACD.

a) Să se arate că raportul razelor acestor cercuri este constant cînd D parcurge interiorul laturii BC.

b) Care este poziția lui D pentru ca razele cercurilor să fie minime?

33. În figura R.9 ABC este un triunghi echilateral și se construiesc în afara lui, pe laturi ca diametre, semicercuri. Un cerc este tangent

la toate aceste semicercuri. Să se afle aria porțiunii hașurate în funcție de l, latura triunghiului echilateral.

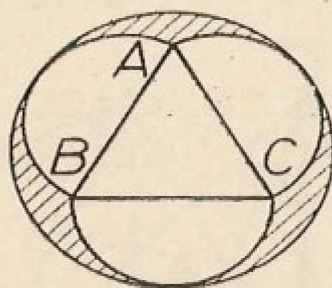
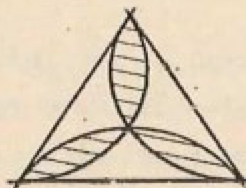
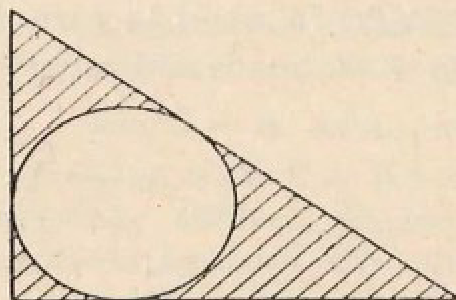


Fig. R.9

34. Pe laturile unui triunghi echilateral ca coarde și tangente la respectiv celelalte laturi, se construiesc trei arce de cerc ca în figura R.10. Să se calculeze aria hașurată în funcție de l, latura triunghiului.


Fig. R.10

35. Dintr-un triunghi dreptunghic cu laturile b, c, să se „decupeze" cercul înscris. Se cere aria rămasă din triunghi (fig. R.11).


Fig. R.11

36. Pe laturile AB și CD ale patrulaterului convex $ABCD$ se iau respectiv segmentele $AM = NB$, $DP = QC$. Să se arate că dacă ariile lui $AMPD$ și $NBCQ$ sînt egale, patrulaterul $ABCD$ este trapez (fig. R.12)

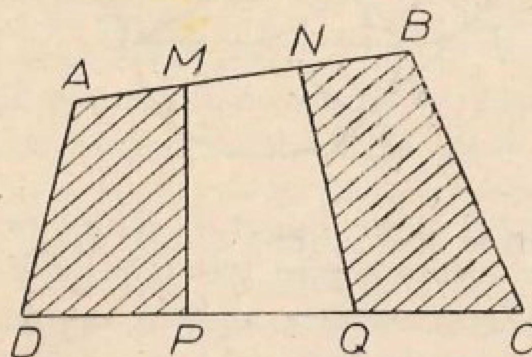


Fig. R.12

37. Într-un cerc dat de centrul O și de rază 2 cm înscriem un dreptunghi variabil $ABCD$. Pe latura AB luăm punctul M. Ducem $MN \parallel AC$, ($M \in BC$); $NP \parallel BD$ ($P \in CD$), $PQ \parallel AC$ ($Q \in DA$). Arătați că $MNPQ$ este paralelogram și calculați perimetrul său.

SOLUŢII

PROBLEME RECAPITULATIVE DIN MATERIA CLASEI A 6-a

1. Se compară de pildă $\triangle EBG$ cu $\triangle ABC$. **2.** *a)* $\sphericalangle B'CH = 30°$, împreună cu simetricul său formează un unghi de 60° și $\sphericalangle B'HC \equiv \sphericalangle BAC$ etc... *b)* $\sphericalangle BHC = 120°$ deci HI îl împarte în $\sphericalangle BHI \equiv \sphericalangle IHC = 60°$ etc... **3.** Cu notațiile din figura S.0.1. rezultă congruența $\triangle ADM = \triangle ABN$ pen-

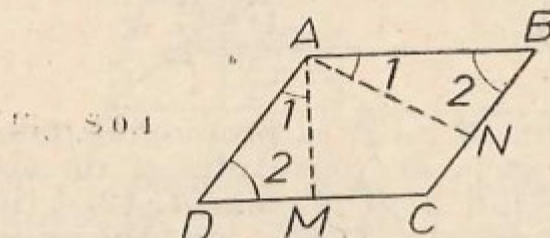
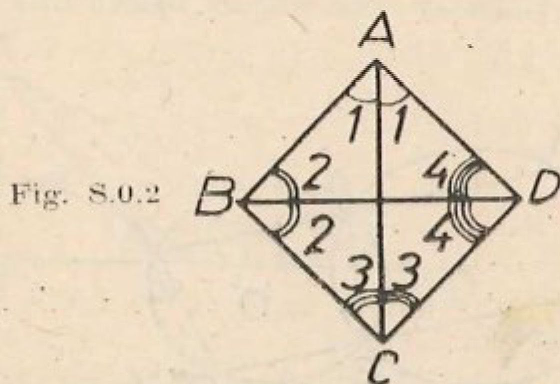


Fig. S.0.1

tru $\sphericalangle D \equiv \sphericalangle B \longrightarrow \sphericalangle DAM \equiv \sphericalangle NAB$, $\sphericalangle AMD \equiv \sphericalangle ANB$ și $AN \equiv AM$ deci ipotenuzele $AD \equiv AB$ (fig. S.0.1). **4.** Romb! Cu notațiile din figură $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$ (cazul 2), deci $AB \equiv AD$, $BC \equiv DB$. Asemănător se arată că $AD \equiv DC$, $AB \equiv BC$ (fig. S.0.2).

Fig. S.0.2



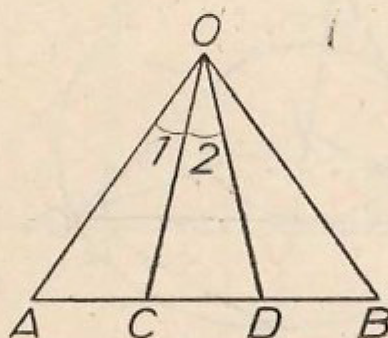
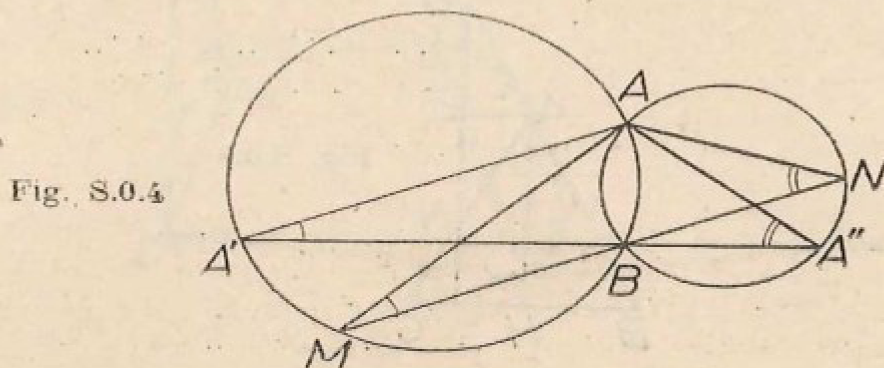


Fig. S.0.3

5. Iese imediat din inegalități de laturi în triunghiurile formate cu laturile inițiale. **6.** 5°, 50°, 125°. **7.** Ar însemna (fig. S.0.3) că atît $\triangle OAD$ cît și $\triangle OCB$ ar fi isoscele, și de aici că dintr-un punct se pot duce două perpendiculare distincte pe aceeași dreaptă. **8.** Se dovedește că unghiurile opuse sînt suplimentare. **9.** În figura S.0.4, $\sphericalangle ABA' = 90° = \sphericalangle ABA''$, $\sphericalangle A' \equiv \sphericalangle M$. **10.**

Fig. S.0.4



Este mijlocul „arcului mic" BC. Nu are importanță: trece prin mijlocul arcului pe care nu-l descrie A. **11.** Considerăm problema rezolvată. Cercurile cu diametre DA respectiv BC au cîte un semicerc pe care se află două vîrfuri ale pătratului (fig. S.0.5.) Fie M și N „mijloacele" celorlalte două semicercuri. Pe aici (conform problemei precedente) trec bisectoarele-diagonale ale unghiu-

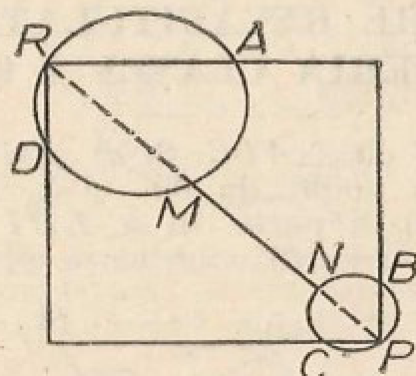


Fig. S 0.5

rilor pătratului. Deci unim M cu N și prelungim pînă taie semicercurile celelalte. Obținem P și R, vîrfurile pătratului și de aici încolo problema este simplă. Examinați cazul cînd M și N coincid. **12.** I fiind pe bisectoarea $\sphericalangle A$, arcele BL și LC sînt congruente (L este punctul unde bisectoarea din A taie a doua oară cercul), deci și coardele $LB = LC$. I, centrul cercului înscris fiind și pe bisectoarele lui B și C, cu notațiile din figura S.0.6. $\sphericalangle L = 2 \cdot \sphericalangle 1$, $\sphericalangle ILC = \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3$, deci $\sphericalangle CIL = \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3$.

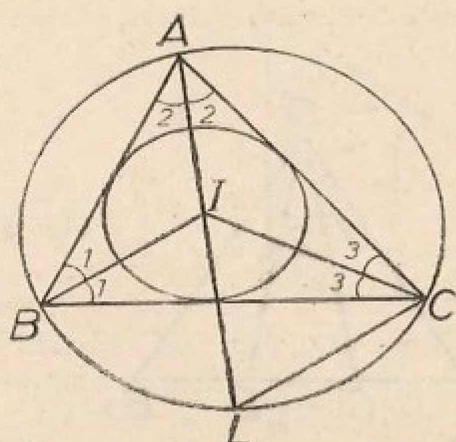


Fig. S.0.6

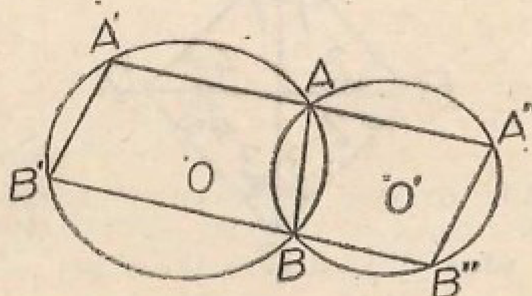


Fig. S.0.7

13. $\sphericalangle B' \equiv \sphericalangle AB'B$, etc., deci $A'B' \parallel A''B''$ (fig. S.0.7).

14. *a*) Cu notațiile din figura S.0.8: $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle A_2 \equiv \sphericalangle M_1$, $\sphericalangle A_2 \sphericalangle ANE$. De aici, $\sphericalangle M_1 \equiv \sphericalangle ANE$, și $\triangle AMN$ isoscel. *b*) Ducem $AE \perp MN$, $EN \equiv EM$,

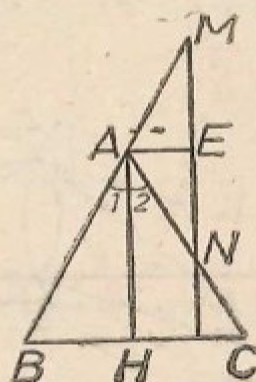


Fig. S.0.8

de aici $MN + NP = 2PE = 2AH$, şi c) locul geometric al lui E este un segment din A paralel la BC.
15. Laturile neparalele sînt congruente: una este linie mijlocie şi alta fiind mediană într-un triunghi dreptunghic este jumătate din ipotenuză. **16.** a) $C'A_2 \parallel BH$, $A'C' \parallel AC$ şi $BH \perp AC$ deci $C'A_2 \perp A'C'$, b). Patrulaterul are două unghiuri opuse, drepte: figura S.0.9. $A'B'A_2C'$

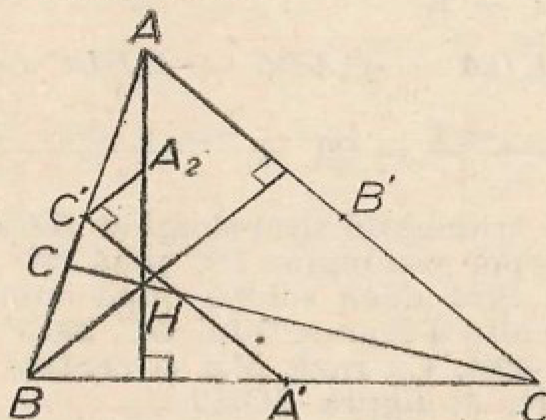
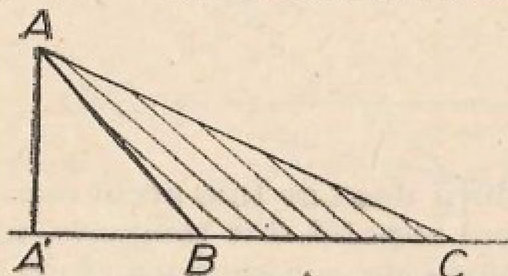


Fig. S.0.9

17. Folosind raţionamentul din ultimele două probleme referitor la celelalte vîrfuri şi laturi ale triunghiului. **18.** Prelungim CB cu $CD \equiv BC$ şi se formează un triunghi isoscel $\triangle ABD$ cu $\sphericalangle BAD = 60°$ deci echilateral. **19.** Din problema precedentă $\sphericalangle EDA = 90°$, din congruenţa triunghiurilor $\triangle CEB$ şi $\triangle BDA$ rezultă $\sphericalangle BEC \equiv \sphericalangle ADF$. Deci $AEFD$ inscriptibil deci $\sphericalangle AFE = \sphericalangle ADE = 90°$. **20.** Ducem perpendiculara pe înălţimea AA', apoi cu centrul în A şi cu două raze cît AB respectiv AC intersectăm această perpendiculară. Există două soluţii (cu unghi obtuz sau ascuţit) figura S.0.10.



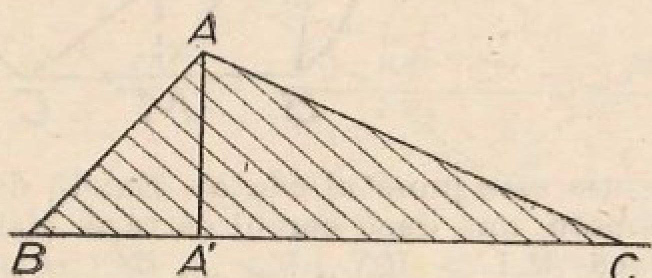


Fig. S.0.10

21. $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle C_1$ (le vom nota pe toate cu $\sphericalangle 1$, S.0.11) $\sphericalangle ADC = 180° - \sphericalangle 1$. Din triunghiul isoscel DCF rezultă:

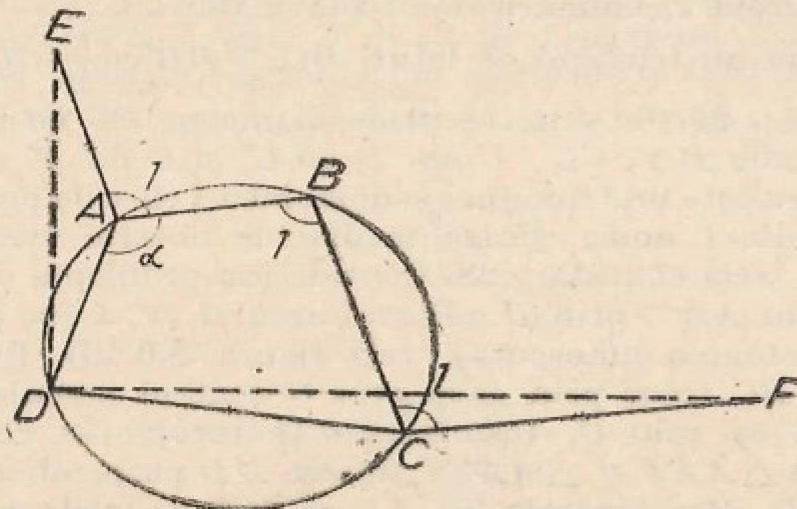


Fig. S.0.11

$$\sphericalangle FDC = \frac{180 - (180 - \sphericalangle\alpha - \sphericalangle 1)}{2} = \frac{\sphericalangle\alpha + \sphericalangle 1}{2},$$

$$\sphericalangle EDA = \frac{180^\circ - (360^\circ - \sphericalangle\alpha - \sphericalangle 1)}{2} = \frac{\sphericalangle\alpha + \sphericalangle 1}{2} - 90;$$

$$\sphericalangle ADC = 180^\circ - \hat{1},$$

$$\sphericalangle EDF = \sphericalangle EDA + \sphericalangle ADC - \sphericalangle FDC = \frac{\sphericalangle\alpha + \sphericalangle 1}{2} - 90^\circ + 180^\circ -$$

$$- \sphericalangle 1 - \frac{\sphericalangle\alpha - \sphericalangle 1}{2} = 90^\circ + \frac{\sphericalangle\alpha + \sphericalangle 1 - 2\sphericalangle 1 - \sphericalangle\alpha - \sphericalangle 1}{2} = 90^\circ.$$

22. Întîi construim triunghiul dreptunghic $BB'C$ unde se cunosc ipotenuza BC şi cateta BB'. Apoi prelungim $B'C$ pînă taie arcul care „vede" segmentul BC sub unghiul A. Sînt două soluţii după cum construim arcul capabil de A de o parte sau de alta a segmentului BC. **23.** Pe coarda BC construim arcul capabil de unghiul $\sphericalangle A$. Cu raza MA şi centrul M tăiem cu un arc de cerc acest arc capabil de A, figura SO.12

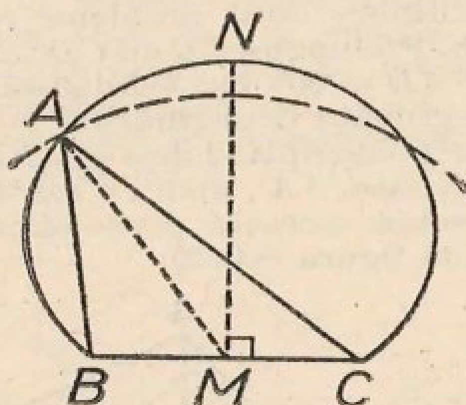


Fig. S.0.12

Intersecţia este punctul căutat. Există două soluţii dacă se taie arcul capabil în 2 puncte, una dacă cercul de rază MA şi arcul capabil sînt tangente, niciuna dacă $MA > MN$ ($MN \perp BC$) şi o infinitate de soluţii dacă $A = 90^\circ$ şi $MA = \frac{BC}{2}$.

24. Se găsesc trei triunghiuri congruente. A doua intersecţie a două cercuri se află pe cercul circumscris unui patrulater...

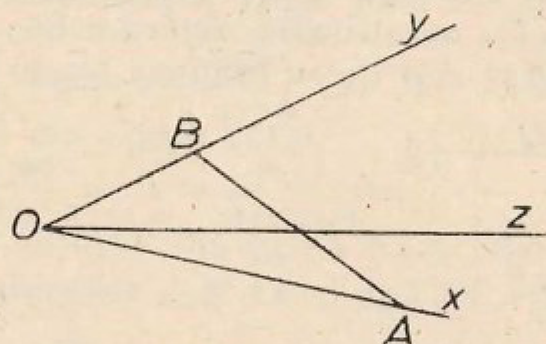
25. Construim un triunghi de laturi $BC, \frac{2}{3} BB'$ şi $\frac{2}{3} CC'$. De aici rezolvarea este imediată... **26.** Pe semicercul de diametru BC cu centrul în B respectiv C ducem corzile BB', CC'. Unim B cu C' şi C cu B' şi se vor tăia în A... **27.** Se construieşte un triunghi cu două laturi cît cele date, şi a treia cît dublul medianei. Dublul uneia dintre medianele acestui triunghi (precizaţi care) este latura a treia căutată... **28.** Considerăm problema rezolvată, avînd cercul circumscris lui ABC, prin D mijlocul arcului BC trece prelungirea segmentului AI' (bisectoarea cunoscută) (vezi figura S.0.13). Perpendiculara din M, mijlocul lui BC trece prin D şi prin O centrul cercului; mediatoarea corzii AD trece şi ea prin O. Problema este rezolvată: construim triunghiurile dreptunghice $\triangle AA'I$ şi $\triangle AA'M$; ducem MD perpendiculară pe $A'M$ şi $\{D\} = AI \cap MD$. Mediatoarele lui AD şi MD se întîlnesc în O. Cu o rază cît

OA tăiem dreapta $A'M$ în B și C. **29.** Unghiurile $\sphericalangle M$ și $\sphericalangle M'$ (fig. S.0.14) sînt constante fiind „înscrise“ în respectiv arce fixe, deci $\sphericalangle P$ este constant și „vede“ segmentul TT' sub același unghi, și anume de 90°, $\sphericalangle M$ și $\sphericalangle M'$ fiind

Fig. S.0.13

Fig. S.0.14

complementare. Soluția este deci un cerc de diametru TT'. **30.** Se construiește întîi un semicerc de diametru BC se duce pe el B' în compas cu centrul B și raza BB'. Unim C cu B' și prelungim pînă taie cercul de centru O și de rază OB. Dacă O nu este pe mediatoarea lui BC, problema este imposibilă. **31.** Considerăm problema rezolvată. OM este axa mediană în OAB (fig. S.0.15).



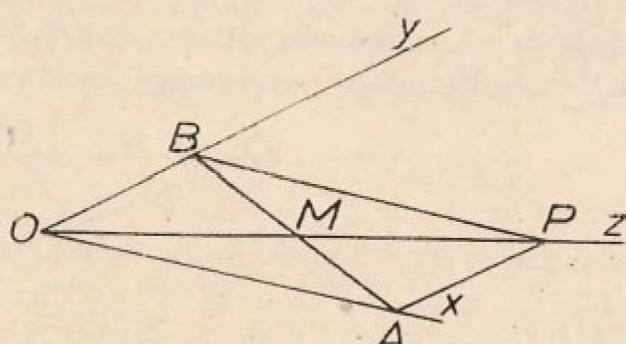
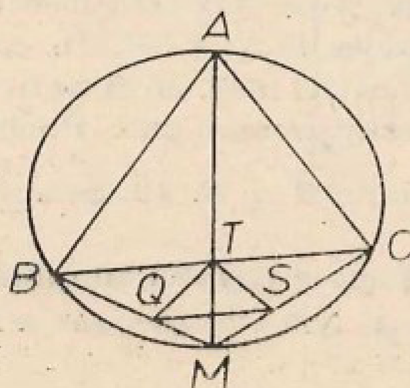


Fig. S.0.15

Punctele A și B sînt egal depărtate de OZ. De aici ni se sugerează că trebuie să se găsească pe o paralelă la OX respectiv OY egal depărtate de M. Deci luăm pe OZ, segmentul $MP = OM$, construim paralelogramul $AOBP$ de diagonală OP și punctele A și B sînt cele căutate.

32. *a*) În figura S.0.16, pătratul $TQMS$ inscriptibil avînd două unghiuri opuse drepte. Deci $\sphericalangle QTS = 60°$. T fiind pe bisectoare $TQ \equiv TS$. Deci avem de-a face cu un triunghi isoscel cu un unghi de 60°. *b*) Bisectoarea unghiului mobil $\triangle BMC$ trece prin mijlocul (fix) al arcului mare $\widehat{BC}$...

Fig. S.0.16



CAPITOLUL I

1 pag. 12-13

1. $AC = 25$ cm, $CB = 30$ cm. **2.** $CA = 275$ cm, $CB = 330$ cm (C se găsește în afara segmentului AB, mai aproape de A). **3.** $x = \frac{y}{z}$, $y = xz$, $z = \frac{y}{x}$.

4. Folosim una din proporțiile derivate: $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} \Leftrightarrow \frac{CA + CB}{CB} = \frac{DA + DB}{DB} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{AB}{CB} \Leftrightarrow \frac{AB}{DB} \Leftrightarrow CB = DB \Leftrightarrow C = D$. **5.** Raționament asemănător cu (4).

6. Se aplică teorema lui Thales de mai multe ori...**7.** Teoremele în legătură cu linia mijlocie. **8.** Dacă este corect formulată, procedînd prin reducere la absurd și folosind rezultatele de la problemele 4 și 5, reciproca este adevărată. Aveți grijă la „așezarea" punctelor pe cele două laturi. **9.** $\frac{AN}{NC} = \frac{3}{8}$. **10.** Se folosesc, de pildă, două triunghiuri congruente. **11.** Revedeți demonstrația teoremei lui Thales, care a fost făcută pe un caz particular. În loc de D_2 veți avea D_m, iar B ar juca rolul lui D_n. Evident, neparticularizînd, va trebui să apelați la un „șir de puncte", scriind de exemplu: „D_1, D_2,..., D_m", adică nu puteți să enumerați toate punctele. **12.** Cu notațiile din figura S.I.1 „purtăm" în continuare pe aceeași semidreaptă w și u și, cu originea tot în O, pe

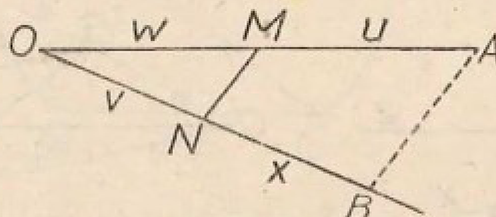


Fig. S.I.1

o altă semidreaptă îl desenăm pe v, ducem apoi prin A o paralelă la MN • • $BN = x$. **13.** Nu putem „începe" dintr-un punct O, segmentul x trebuind să apară pe ambele drepte în poziții care nu-și corespund. Trebuie folosit un alt procedeu. **14.** Se folosește teorema lui Thales în $\triangle OA_1,B_1$ și $\triangle OB_1C_1$ și apoi reciproca în $\triangle OA_1C_1$. **15-16.** Desenăm 6 segmente dacă D nu este mijlocul lui BC, și 3 dacă $BD \equiv DC$. Se demonstrează folosind repetat teorema lui Thales și problema 4. **17.** Prelungim latura AC a triunghiului ABC cu segmentul $AM \equiv AB$. Ținînd seama că triunghiul AMB este isoscel, că $\sphericalangle BAC$ este unghi exterior lui și că AD este bisectoare, obținem $AD \| MB$. Aplicăm acum teorema lui Thales în $\triangle ABC$. În cazul bisectoarei exterioare purtăm segmentul $AM \equiv AB$ astfel încît M să fie în interiorul lui AC (Dacă $AB < AC$) etc... **18.** Procedeul este asemănător. Punctul M nu se găsește în interiorul unghiului, dacă A rămîne O și B. **19.** Se aplică teorema lui Thales. **20.** $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dați alte exemple fără să amplificați sau să folosiți proporția din exemplu.

2 pag. 18-20

1. Cu notațiile din figura S.I.2, din asemănarea triunghiurilor $\triangle DAB \sim \triangle DMP$, $\triangle CAB \sim \triangle CPN$, ținînd seama că $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$, se obține $MP \equiv NP$. **2.** Procedeu similar cu cel de la (1). **3.** Exprimînd două relații de asemănare unde

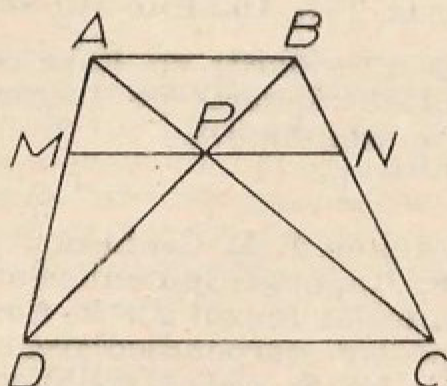


Fig. S.I.2

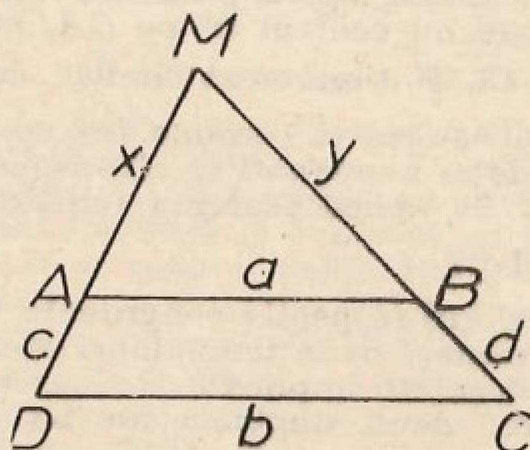


Fig. S.I.3

figurează un raport comun, se obține relația cerută. **4.** Unim de pildă una din extremitățile bazei mici cu mijlocul bazei mari, prin punctul unde se intersectează diagonala ducem o paralelă la baze. **5.** Este în fond problema 1), se obține $x = \frac{ab}{a+b}$. **6.** $SO' = \frac{r(R+r)}{R-r}$. **7.** $DE = 10$, $AE = 12$. **8.** Cu notațiile din figura S.I.3.

$y = \frac{ad}{b-a}$, $x = \frac{ac}{b-a}$ etc.

9. Cu notațiile din figura S.I.4. ($DB = m$, $AC = n$) se obține, din asemănarea triunghiurilor $\triangle NAB$ și $\triangle NDC$: $ND = \frac{ma}{a+b}$, $NB = \frac{mb}{a+b}$, $NA = \frac{nb}{a+b}$, $NC = \frac{na}{a+b}$.

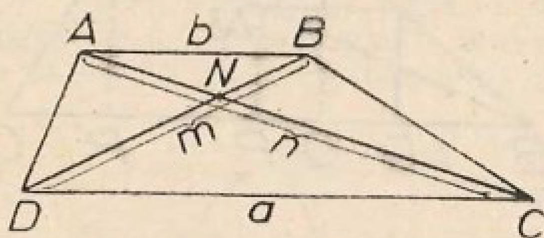


Fig. S.I.4

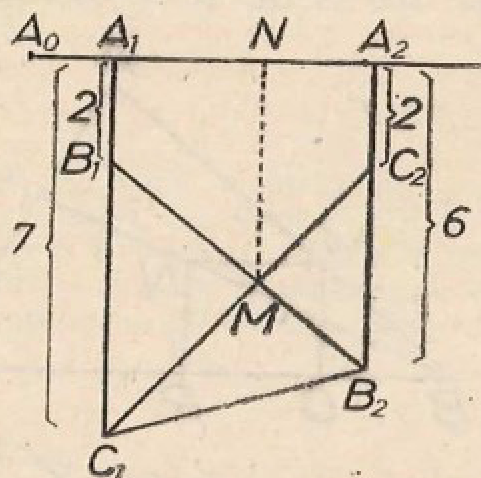


Fig. S.I.5

10. a. Folosim notațiile din figura S.I.5.: $B_1C_1 = 5$, $B_2C_2 = 3$. Revine la a împărți segmentul $A_1A_2 = 1$ cm în raportul $\frac{5}{3}$. Din $A_0M = 1 + \frac{5}{8} = \frac{13}{8}$ cm

și $NM = 3 + \frac{3}{8} \cdot 4 = 4{,}5$ cm. b. Procedeu asemănător cu cel de la α). **11.** $MO' = \frac{dr}{R - r}$ (O' fiind centrul cercului cu raza mai mică) $MO = \frac{dR}{R - r}$. **12.** Pentru tangenta comună interioară $MO' = \frac{dr}{R + r}$, $MO = \frac{dr}{R - r}$ (vezi procedeul analog de la problema 6). **13.** Procedeu analog cu cel de la 11). **14.** Un cerc cu centrul O' pe OA, cu raza de k ori mai mică, astfel încît $\frac{O'A}{OA} = k$. **15.** Raționament similar cu cel de la 14). **16.** Punctul se află la intersecția tangentei comune (exterioară sau interioară) cu linia centrelor. **17.** Prin două asemănări se „transpune" suma de rapoarte pe diagonala AC. **18.** 4. **19.** Se aplică teorema fundamentală a asemănării.

3. pag. 24-25

1. Au unghiuri respectiv congruente. **2.-3.** La fel cu 1. **4.** Cazul doi. **5.** Cazul 1. **6-7.** Formați două triunghiuri asemenea. **8.** Raportul ipotenuzelor egal cu cel a două catete implică asemănarea triunghiurilor (cazul 2). **9.** Cazul 1 de asemănare: două unghiuri au laturile respectiv perpendiculare. Atenție: această proprietate va fi utilă la capitolul arii! **10.** Se aplică problema precedentă. **11.** Din asemănarea triunghiurilor $\triangle PMC$ și $\triangle MNB$ rezultă: $\frac{PC}{NB} = \frac{MC}{MB}$ = constant, pentru că raportul dintre o latură a unui pătrat și diagonala sa este constant (ușor de demonstrat cu cazul 1). **12.** Construim un pătrat oarecare $MNPQ$ cu latura QP pe BC și M pe AB, unim B cu N și prelungim pînă la N' pe latura AC (fig. S.I.6). Ducem apoi $N'P' \perp AB$ etc. Pătratul căutat este $M'N'P'Q'$. **13.** a. Din congruența $\triangle PAD \equiv \triangle MAD$. b. Din asemănarea $\triangle ABE \sim \triangle AMQ$ (cazul 2). c. Se arată că $MB \perp PS$, și că patrulaterul convex $PATM$ e inscriptibil. **14.** a. Din congruența $\triangle ECB \equiv \triangle DCA$. b. Din a. rezultă $AGCB$ inscriptibil și de aici imediat b. c. Patrulaterul $CDEG$ inscriptibil (din a) etc. **15.** Am demonstrat (11) că într-un triunghi, produsul dintre înălțime și latura pe care cade este constant. Deci $DQ \cdot AC = DC \cdot AA'$ (în $\triangle ADC$), $PD \cdot AB = BD \cdot AA'$ (în $\triangle ABD$, A' fiind piciorul înălțimii din A) dar $BD \equiv DC$ și de aici relația cerută este imediată.

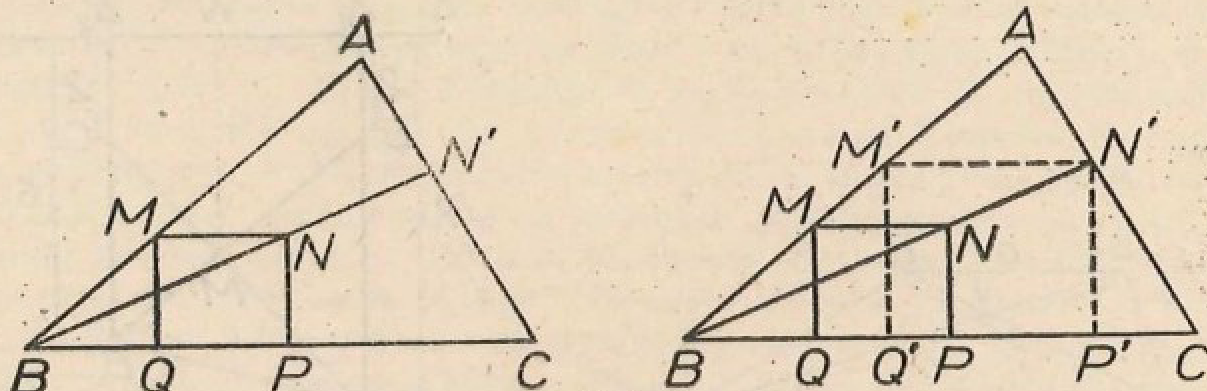


Fig. S.I. 6

5. pag. 33-34

1. Comparăm în figura S.I.7 $\triangle PAT \sim \triangle PBT$ (cazul 1). **2.** Se aplică în ambele puterea punctului și se pune în evidență secanta comună. **3.** Se demonstrează că un punct care nu se găsește pe acea secantă comună are puteri diferite față

Fig. S.I.7

Fig. S.I.8

de cercuri, unind punctul cu un punct de intersecție al cercului și constatînd că punctele celelalte de intersecție cu cercurile diferă. **4.** Tangenta comună în punctele lor de tangență. **5.** Intersectăm două locuri geometrice de tipul celor din problema precedentă (secante comune) și punctul se găsește pe locul geometric corespunzător și celei de a treia perechi. Pe aceeași semidreaptă d, cu o extremitate comună ducem segmentele u și v, și pe segmentul care este diferența lor, ca coardă, construim un cerc (fig. S.I.8). Tangenta la acest cerc este $\sqrt{uv}$. În particular pentru comoditate, se ia coarda u-v ca diametru. **7.** Unim A cu B și prelungim pînă taie dreapta d în M. Construim $\rho = \sqrt{MA \cdot MB}$. Apoi luăm pe d segmentul $MP = \rho$, care se poate lua în două sensuri, și construim cercurile ce trec prin P, B, A. Sînt două, după cum am luat pe dreapta d punctul P de o parte sau de alta a lui M. Dacă $AB \parallel d$, atunci punctul P de tangență se obține ducînd mediatoarea segmentului AB, la intersecția ei cu d. Atunci soluția este unică. **8.** Comparăm triunghiul $\triangle MAD$ și $\triangle MCB$ și ținem seama că unghiurile opuse într-un patrulater inscriptibil sînt suplementare. **9.** Dacă $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle B_1$, pentru că $\sphericalangle AMD \equiv \sphericalangle BMC$ rezultă $\sphericalangle D_4 \equiv \sphericalangle C_4$ (fig. S.I.9).

Fig. S.I.9

Aplicînd cazul 2, din asemănarea $\triangle AMD \sim \triangle BMC$ rezultă și asemănarea $\triangle MDC \sim \triangle MAB$, deci $\sphericalangle C_5 \equiv \sphericalangle B_5$, $\sphericalangle A_6 \equiv \sphericalangle D_6$, deci $2(\sphericalangle 1 + \sphericalangle 4 + \sphericalangle 5 + \sphericalangle 6) = 360° \Leftrightarrow (\sphericalangle 1 + \sphericalangle 5) + (\sphericalangle 4 + \sphericalangle 6) = 180°$. **10.** Cu notațiile din figura S.I.10 avem pe de o parte $MA \cdot MB = k$ (din ipoteză), pe de altă parte $MA \cdot MC = c$ (constant) (ca putere a punctului M față de cerc). Făcînd

Fig. S.I.10

raportul, $\frac{MB}{MC} = \frac{k}{c}$ (constant). Deci dacă C descrie cercul, M descrie şi el un cerc, raportul dintre raze fiind $\frac{k}{c}$, avînd centrul O', $\left(\frac{MO'}{MO} = \frac{k}{c}\right)$.

11. Dacă M se află pe cerc, ducem diametrul ce trece prin M (MN) (fig. S.I.11). Punctul P astfel încît $MN \cdot MP = k$ va fi (din asemănarea $\triangle AMN \sim \sim \triangle MBP$, cazul 2) piciorul perpendicularei din B pe diametru. P este fix, B mobil, deci descrie coarda perpendiculară pe MN.

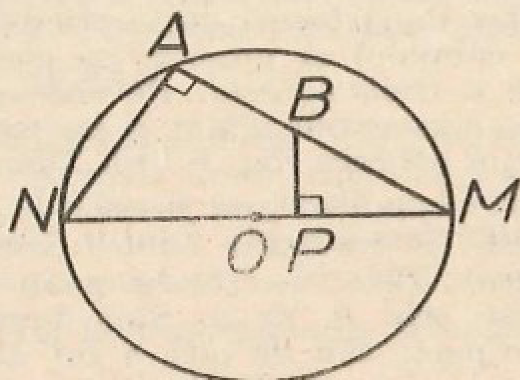


Fig. S.I.11

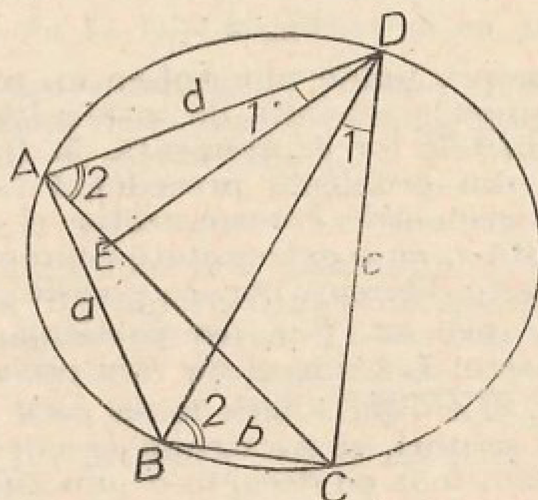


Fig. S.I.12

12. a) Pe latura AD construim unghiul $\sphericalangle EDA \equiv \sphericalangle CDB$, triunghiurile $\triangle EDA \sim \triangle CDB$ (x). b) Se observă că şi $\triangle ADB \sim \triangle EDC$ (xx). c) Din (x), (xx) rezultă respectiv (cu notaţiile din figura S.I.12) $\frac{d}{BD} = \frac{AE}{b}$, $\frac{c}{DB} = \frac{EC}{a}$ de unde $bd = AE \cdot BD$, $ca = DB \cdot EC$. Adunînd: $bd + ca = BD(AE + EC)$, q.e.d. Această teoremă se numeşte a lui Ptolomeu.

13. Demonstraţia este prin reducere la absurd.

14. Construim un cerc oarecare ce trece prin cele două puncte, astfel încît el să taie şi pe celălalt cerc. Ducem secantele comune ale celor două perechi de cercuri. Din punctul lor comun ducem tangenţa la cercul dat. Obţinem astfel un al treilea punct (cel de tangentă). Cercul circumscris ultimului punct şi celor date este cercul căutat. Construcţia se simplifică dacă triunghiul format de centrul cercului dat şi cele două puncte date este isoscel. Sînt două soluţii.

6. pag. 39-40

1. 12, $\frac{60}{13}$, $\frac{25}{13}$, $\frac{144}{13}$. **2.** Proiecţia catetei cunoscute pe ipotenuză este 6, ipotenuza este $\frac{50}{3}$, cealaltă catetă $\frac{40}{3}$, proiecţia celeilalte catete pe ipotenuză este $\frac{32}{3}$. **3.** Ipotenuza este de 25, cealaltă catetă de 20 şi celelalte segmente importante se obţin prin înmulţirea cu 5 a segmentelor omoloage dintr-un triunghi cu laturile de 3,4, 5. **4.** O catetă este de 26, cealaltă catetă 62,4, ipotenuza 67,6 etc. **5.** Cateta cu proiecţia cunoscută are $5\sqrt{10}$, cealaltă catetă este de 150, înălţimea de $15\sqrt{10}$ etc... **6.** Înălţimea are 21, ipotenuza 70, o catetă $7\sqrt{10}$, cealaltă $21\sqrt{10}$ etc... **7.** Dacă într-un triunghi pătratul unei laturi este egal cu suma pătratelor celorlalte două laturi, triunghiul este dreptunghi. Atenţie:

o greşeală tipică în formularea acestei reciproce se face în enunțul următor: „Dacă pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor, triunghiul este dreptunghic". Or am admis de la început să triunghiul „are" catete deci că este dreptunghic. Demonstrația se face prin construcție: se dă un triunghi cu laturile a, b, c, și pe laturile unui unghi drept desenat alături $\sphericalangle xoy$, se poartă respectiv segmentele $OC = b$, $OB = c$. Rezultă $BC = \sqrt{b^2 + c^2} = a$. Din congruența celor două triunghiuri rezultă adevărul afirmației. **8.** În figura S.I.13, folosind notațiile ei: $c^2 = xa$, $b^2 = a(a-x)$, adunînd obținem $c^2 + b^2 = a(x + a - x) = a^2$.

9. În $\triangle ABC$ cu $\sphericalangle A = 90°$ luăm pe ipotenuza BC punctele $D \neq E$ astfel ca $BD \equiv BE \equiv BA$, D fiind între B și C (este ca și cum am fi dus cercul

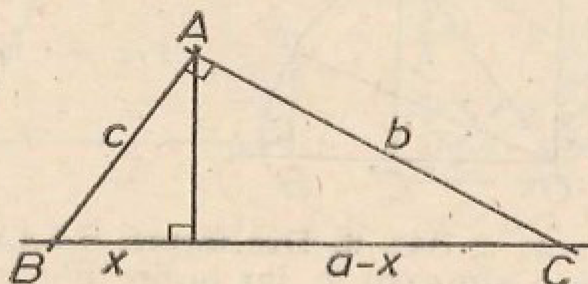


Fig. S.I.13

de centru B și de rază BA...). Cu ajutorul triunghiurilor isoscele BAE, BAD și cu $\sphericalangle A = 90°$ arătăm că $\sphericalangle E = \sphericalangle DAC = \frac{1}{2}\sphericalangle ABC$ (de fapt am redemonstrat pe figura noastră teorema asupra unghiului înscris). Avem $\triangle ACD \sim \triangle ECA$, $\frac{AC}{CE} = \frac{CD}{AC}$. $AC^2 = (CB + BE)(CB - BD)$ etc. **10.** $a\sqrt{2}$. **11.** $2\sqrt{3}$. **12.** $2\sqrt{2}$ ambele. **13.** Ipotenuza este de 10, cealaltă catetă de $5\sqrt{3}$, înălțimea de $5\frac{\sqrt{3}}{2}$ etc... **14.** Latura „oblică" este de 5, diagonala mică de $\sqrt{65}$, diagonala mare $4\sqrt{29}$. **15.** Există două posibilități: a) înălțimea de $2\sqrt{26}$, cealaltă diagonală de $\sqrt{145}$, latura oblică $\sqrt{113}$; b) înălțimea de $4\sqrt{11}$, cealaltă diagonală $\sqrt{295}$, latura „oblică" $8\sqrt{3}$. **16.** $2\sqrt{21}$. **17.** $8\sqrt{21}/5$. **18.** $d = \sqrt{209}$. **19.** Ducînd prin punctul M o secantă ce trece și prin centrul O, deducem că puterea lui M față de cerc este $OM^2 - R^2$. Ea este minimă dacă $OM = 0$ deci cînd punctul este în centru, caz în care puterea este $-R^2$. **20.** $\sqrt{55}$. **21.** $2\sqrt{Rr}$. **22.** $\sqrt{391}$, $\sqrt{31}$. **23.** Folosind teorema înălțimii într-un triunghi dreptunghic, sau, caz general, folosind puterea punctului într-un cerc unde se poate duce o coardă de $u + v$. **24.** Considerînd triunghiul de catete 3 și 4, ipotenuza este 5, proiecțiile catetelor pe ipotenuză sînt 16/5, 9/5, iar înălțimea 12/5 (vezi problema rezolvată 1). Considerăm acum un triunghi asemenea cu el, „raportul de asemănare" fiind 5 etc. **25.** E mai mică cea dată. **26.** Cea dată este „lățimea" adică latura mai mică a dreptunghiului. **27.** $5\sqrt{10}$, $13\sqrt{10}$, $15\sqrt{10}$, $9\sqrt{10}$; 48,40; $48 \cdot 40 = 8 \cdot 5\sqrt{10} \cdot 15\sqrt{10} + 13\sqrt{10} \cdot 9\sqrt{10}$ sau $48 \cdot 40 = (5 \cdot 15 + 13 \cdot 9)10$ etc. **28.** „Dacă într-un triunghi ABC, D este piciorul înălțimii din A și $AD^2 = BD \cdot DC$, atunci $\sphericalangle A = 90°$". Fals, deoarece D ar putea să nu fie între B și C. **29.** Construim triunghiul $B'A'C'$ cu $A' = 90°$, $B'A' \equiv BA$, $C'A' \equiv CA$. Știm din clasa a 6-a că $\sphericalangle A < \sphericalangle A'$, dacă și numai dacă $BC < B'C'$ etc.

7. pag. 46-48

1. $\sin x < \sin y$. Considerăm un sfert de cerc unde $\widehat{AOB} = x$ și $\widehat{AOC} = y$ (O este centrul cercului (fig. S.I.14). Evident $CC' > BB'$ (jumătate din coarda mai apropiată de centru) $\sin x = \frac{BB'}{R}$, $\sin y = \frac{CC'}{R}$ (unde R este raza cercului). Fracțiile au același numitor și este mai mare cea cu numărătorul mai mare. **2.** Raționament similar cu cel precedent, se obține $\cos x > \cos y$. **3.** Sinusul crește mai repede în zona valorilor mici. **4.** $x = 45°$ · **5.** Din tabel $53° < x <$

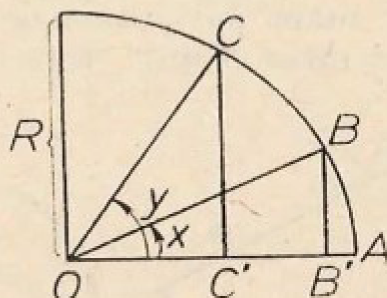


Fig. S.I.14

$< 54°$; din tabel $33° < 90° - x < 34°$. **6.** Din figura S.I.15 rezultă pe lîngă cele notate că înălțimea este $a \sin x \cos x$, iar proiecțiile pe ipotenuză sînt $a \cdot \sin^2 x$ și $a \cdot \cos^2 x$.

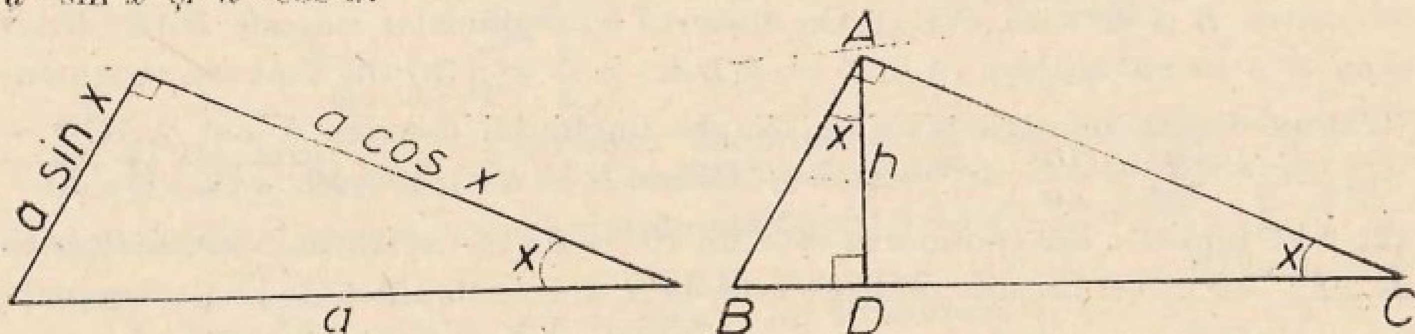


Fig. S.I.15

7. Privind figura S.I.16, $AB = \frac{h}{\sin x}$, $AC = \frac{h}{\cos x}$. $BD = h \cdot \operatorname{tg} x$, $DC = h \cdot \operatorname{ctg} x$, unde numim tangenta unghiului x (notat $\operatorname{tg} x$) raportul dintre cateta opusă lui și cealaltă catetă, și constatăm că $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, iar cotangenta unui unghi (notată cu $\operatorname{ctg} x$) numim raportul dintre cateta alăturată și cealaltă catetă; se verifică ușor că $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$. **8.** Cu notațiile din figura

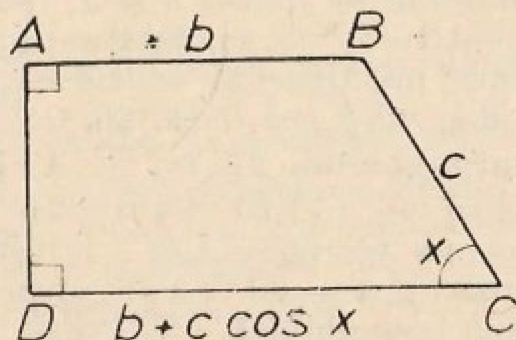


Fig. S.I.16

S.I.16 $DC = b + c \cdot \cos x$, $AD = c \cdot \sin x$, $BD = \sqrt{b^2 + c^2 \sin^2 x}$, $AC = \sqrt{c^2 \sin^2 x + (b + c \cdot \cos x)^2}$.

9. $2R \cdot \sin \frac{x}{2}$. **10.** Baza este $2a \cdot \cos x$; înălțimea corespunzătoare bazei este $a \cdot \sin x$, fiecare din celelalte înălțimi este $2a \cdot \sin x \cdot \cos x$. **11.** $\sin \frac{x}{2} = \frac{a}{2b}$ (fig. S.I.17) **12.** $\text{tg} \cdot \frac{x}{2} = \frac{b}{a}$ (fig. S.I.18).

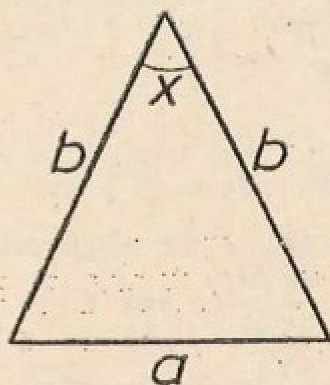


Fig. S.I.17

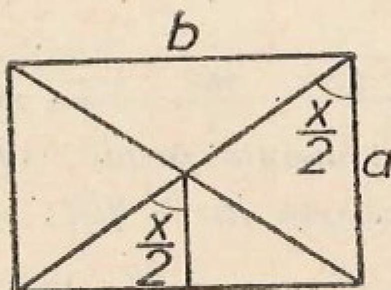


Fig. S.I.18

13. $\sin \frac{x}{2} = \frac{2}{15}$ (fig. S.I.19) **14.** $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R-r}{d}$, $\sin \frac{\alpha}{\alpha} = \frac{R+r}{d}$ (condițiile $R \pm \pm r < d$ duc la existența tangentelor).

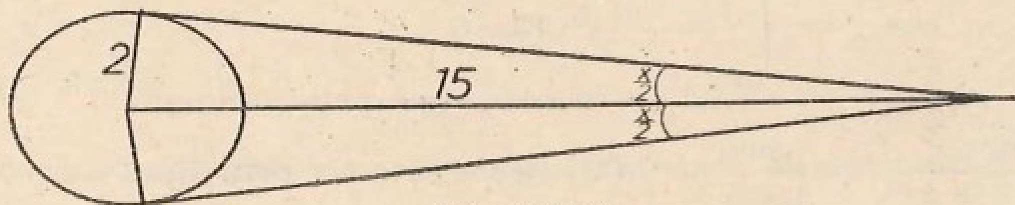


Fig. I.S.19

15. $\cos \alpha = \frac{d}{R}$ (fig. S.I.20).

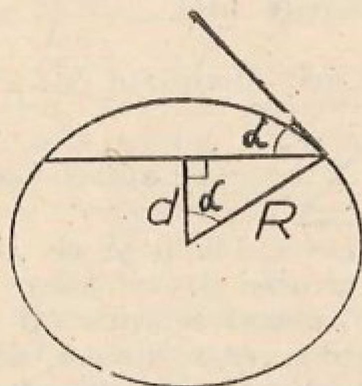


Fig. S.I.20

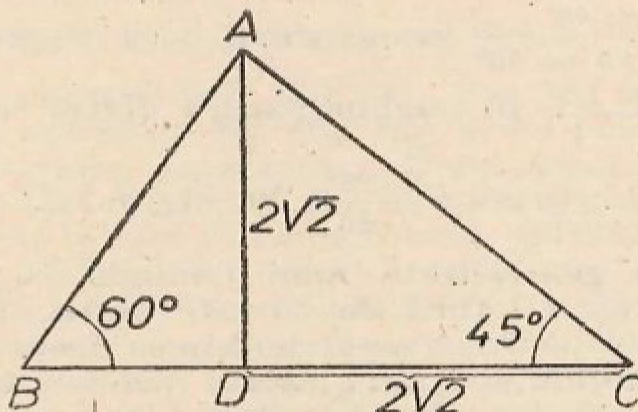


Fig. S.I.21

16. $BF = a \cdot \cos^4 x$, $AF = \sqrt{(a \cdot \cos x \cdot \sin x)^2 + (a \cdot \cos^2 x - a \cdot \cos^4 x)^2} = a \cdot \sin x \cdot \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x \cdot \cos^2 x}$.

8. pag. 52-53

1. $[-1,1]$ fiecare valoare o singură dată! **2.** $[0,1)]$ în afară de capete, fiecare valoare de două ori! **3.** $x = 41^\circ...$, $x = 112^\circ$, $\cos x = 1{,}6$ imposibil; $x = 23^\circ...$, $\sin x = -0{,}34$ deocamdată este imposibil, $\sin x = 2$ imposibil. **4.** Se folosește teorema lui Pitagora. **5.** $\sin(90^\circ + x) = \cos x$, $\cos(90^\circ + x) = -\sin x$. **6.** Nu,

da! **7.** $AB = BD - AD = 10\cos 25° + 7{,}09 \cos 115° = 10 \cdot 0{,}906 - 7{,}09 \cdot 0{,}423 = 6{,}06$.

8. a) $AD = 2\sqrt{2}$, $DC = 2\sqrt{2}$, $BD = 2\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, $AB = \frac{4\sqrt{6}}{3}$,

$BC = BD + DC = \frac{2\sqrt{6}}{3} + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right)$ (fig. S.1.21).

b) $\sin 75° = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$; $\cos 75° = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$.

9. $m_1 = \sqrt{\frac{64+100}{2} - \frac{144}{4}} = \sqrt{46}$, $m_2 = \sqrt{79}$, $M_3 = 3\sqrt{10}$.

10. Notînd cu A unghiul de 60°, $AB = 8$, $AC = 11$ obținem din teorema lui Pitagora generalizată $BC = \sqrt{97}$; $\sin B = \frac{11\sqrt{3}}{2\sqrt{97}}$; $\sin C = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{97}}$ (B și C se vor calcula din tabele. **11.** $8\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = 4\sqrt{2+\sqrt{2}}$;

$\sin 22°30' = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\cos 22°30' = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; **12.** $16 \sin \frac{x}{2}$, $8 \cos \frac{x}{2}$, $\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$, $\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$. **13.** 6.

14. $R = \frac{6}{\sin 56} = \frac{6}{0{,}829} \simeq 7{,}24$ (prin rotunjire prin adaos).

15. $r = \frac{\sin 62°}{1 + \sin 28°} \simeq \frac{0{,}883}{1{,}469} \simeq 0{,}601$ (aproximativ prin lipsă).

16. $\frac{329 - 252 \sin 50° - 28\ 277 - 252 \sin 50°}{9} = \ldots$

17. a) $d^2_{12} = 89 \pm 80 \cos 40° = 89 \pm 80 \sin 50°$. **b)** $\frac{\sin \alpha}{5} = \frac{\sin \beta}{8} = \frac{\sin 40}{89 + 80 \sin 50°}$ (se exprimă α și β prin sinusurile lor).

18. a) $\frac{12\sqrt{7}}{5}$, b) unghiul ascuțit dintre tangente are cosinusul $\cos \alpha = \frac{75}{117}$.

19. $a = \ldots$; b) $\cos a = \frac{25}{26}$. **20.** Fig. S.1.22 — se aplică teorema lui Pitagora generalizată unui triunghi cu laturile 13, 14, 6 și se obține că unghiul opus laturii de 13 este obtuz. Din lungimile proiecțiilor laturilor neparalele pe baze, apoi înălțimea trapezului. b) rezultă aplicînd Pitagora datelor obținute. c) Cu ajutorul teoremei lui Pitagora generalizată, din același triunghi. d) din triunghiurile dreptunghice din care am calculat diagonalele se deduc și unghiurile dintre diagonale și baze etc. e) Utilizînd suma unghiurilor într-un triunghi. **21.** Diagonala nu poate forma un triunghi împreună cu laturile de 4 și 6, deci ea formează un triunghi împreună cu baza de 16 și latura de 6. Cum $12 < 16$, latura de 6 nu poate forma unghi obtuz cu baza mare. Din teorema lui Pitagora generalizată, proiecția diagonalei de 12 pe baza mare este $11\frac{3}{8} > 4$, deci trapezul este ca în prima figură. Se continuă într-un mod asemănător cu problema 20. **22.** Sînt două soluții după cum acele capete sînt de părți diferite sau de aceiași parte a dreptei: $\sqrt{4^2 + (7 \pm 5)^2}$.

23. În $\triangle ABD$, $\triangle BCD$ se calculează (M şi N fiind proiecţiile lui A, C pe BD) BM, BN şi apoi AM, CN (teorema lui Pitagora generalizată, apoi teorema lui Pitagora). Se aplică problema 22. **24.** Se foloseşte problema rezolvată (3) în cele 4 triunghiuri formate din cîte o diagonală şi cîte două laturi...; la sfîrşit se foloseşte suma unghiurilor într-un triunghi. **25.** După cum $\sphericalangle B + \sphericalangle D$ este $>$, $=$ sau $<$ decît $180°$.

9. pag. 58-59

1. Cu notaţiile din figura S.I.23: $m^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$.

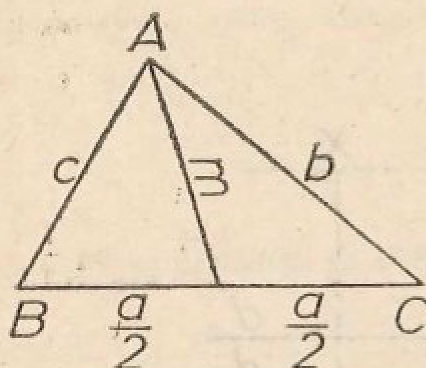


Fig. S.I.23

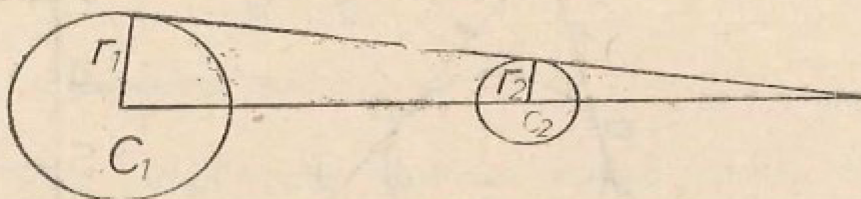


Fig. S.I.24

2. Se aplică teorema bisectoarei şi apoi Stewart. Se obţine: $\frac{c^2ab}{b+c} + \frac{b^2ac}{b+c} - i^2a = \frac{a^3bc}{(b+c)^2}$ şi de aici se scoate i, bisectoarea unghiului A... **4-5.** Enunţarea reciprocei nu ridică dificultăţi, demonstrarea ei se face prin reducerea la absurd **6.** Se aplică teorema lui Menelaos în $\triangle C_1C_2C_3$, ţinînd seama că raportul segmentelor $\frac{MC_1}{MC_2} = \frac{r_1}{r_2}$, unde s-au folosit notaţiile din figura S.I.24.
7. Se dau trei cercuri exterioare două cîte două C_1, C_2, C_3. Fie M_{12} intersecţia tangentelor comune interioare ale cercurilor C_1, C_2, M_{13} la fel pentru C_1, C_3 iar M_{23} intersecţia tangentelor comune exterioare... Demonstraţi că M_{12}, M_{13}, M_{23}* sînt coliniare. **8.** Cu notaţiile din figura S.I.25, adică ţinînd cont de tangentele (segmente) dintr-un punct la care sînt congruente, aplicăm teorema lui Ceva. **9.** Exact acelaşi enunţ, înlocuind „cercul înscris" cu „un cerc tangent celor trei laturi, nesituat în interiorul triunghiului". **10.** Două drepte perpendiculare pe segmentul de dreaptă care uneşte punctele, demonstrînd că proiecţia medianei triunghiului cu vîrf mobil pe latura fixată, rămîne mereu aceiaşi... **11.** Se aplică rezultatul de la problema precedentă şi se obţine o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor (această dreaptă se numeşte axă radicală). **12.** Axele radicale ale celor trei perechi de cercuri, ce se pot forma cu trei cercuri C_1, C_2, C_3 ce n-au centrele coliniare sînt concurente (sau coincid toate trei). Demonstraţia pe baza problemei 11, la fel ca la concurenţa mediatoarelor în triunghi. **13.** Avem $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$ (Ceva), $\frac{M'C}{M'B} = \frac{MB}{MC}$ etc.
14. $BD^2 = MB^2 - MD^2$. Se scriu alte asemenea 5 relaţii; se înlocuiesc în relaţia de demonstrat şi se obţine o identitate. Reciproca: dacă punctele D,E,F situate pe laturile BC,CA,AB ale unui triunghi satisfac din enunţ, atunci perpendicularele ridicate în acele puncte pe laturile respective sînt concurente. *Demonstraţie.* Fie M intersecţia celor din D,E şi F' piciorul per-

pendicularei din M pe AB. Folosind şi teorema directă deducem că $FA^2-FB^2 = F'A^2-F'B^2$. Să presupunem că ambii membri sînt pozitivi, deci că F, F' sînt de aceiaşi parte a mijlocului X a lui AB ca şi B. Avem $FA^2-FB^2 = (FX-XA)^2 - (FX-XB)^2 = 2FX \cdot XA$ şi deci rezultă $FX = F'X$; ţinînd seama de poziţie, $F = F'$. Dacă aţi dat alt „final de soluţie" atenţie la situaţia în care nu ambele puncte F, F' sînt între A şi B. **15.** Folosiţi problema 1: un cerc cu centrul în mijlocul X al lui AB, sau mulţimea formată numai din X.

16. $XA \equiv XZ \quad XA^2 = XZ^2, \; XY^2 + AY^2 = XZ^2$
$YX^2 + (AT - AS)^2 = (XT + AS)^2$
$XY^2 = 2XT \cdot 4AS$
$AS = SS' = TZ$ (fig. S.I.26).

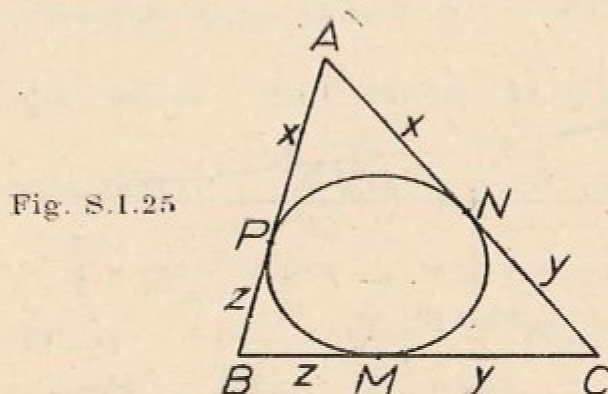


Fig. S.I.25

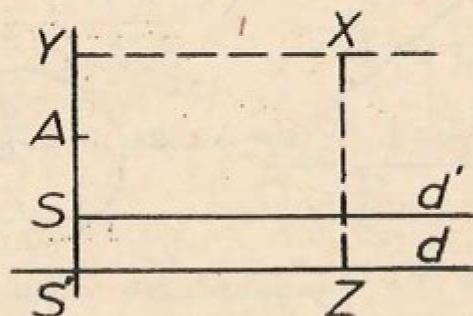


Fig. S.I.26

17. (Figura S.I.27)

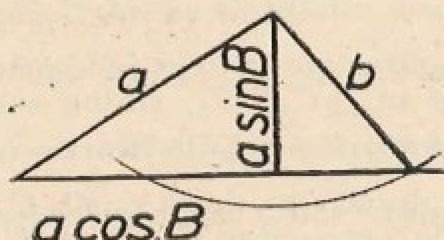


Fig. S.I.27

0 soluţie dacă $B \geqslant 90°$, $b \leqslant a$
1 soluţie dacă $B > 90°$, $b > a$
0 soluţie dacă $B < 90°$, $b < a \cdot \sin B$
1 soluţie dacă $B < 90°$, $b = a \cdot \sin B$
2 soluţii dacă $B < 90°$, $a \cdot \sin B < b < a$
1 soluţie dacă $B < 90°$, $b \geqslant a$
$c = a \cdot \cos B \pm \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 B}$ unde semnul $-$ apare numai dacă sînt 2 soluţii.

CAPITOLUL II

10. pag. 63—64

1. Semiprodusul catetelor. **2.** $S = a^2/2$. **3.** $S = a^2 \sqrt{3}/4$. **4.** a) $S = \frac{ab \cdot \sin C}{2}$.
b) Raportul produselor laturilor care formează unghiurile congruente. **5.** $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde $p = \frac{a+b+c}{2}$ şi a, b, c laturile triunghiului.

6. $S_{ABC} = S_{ABE} + S_{BCE} = (S_{ADE} + S_{BDE}) + S_{BCE}$ (se aplică de două ori proprietatea de aditivitate). 7. Se prelungeşte AM pînă taie BC în N. Avem $S_{ABC} = S_{ABN} + S_{ANC} = (S_{ABM} + {}_{BMN}) + (S_{CMN} + S_{CMA})$ şi apoi $S_{MBC} = S_{MNB} + S_{MNC}$ (de trei ori aditivitatea). 8. Unul din triunghiuri are aceeaşi arie cu un altul care împreună cu al doilea triunghi din enunţ completează paralelogramul. 8. Se ţine cont că mediana împarte un triunghi în alte două triunghiuri de aceeaşi arie. 10. Cu notaţiile din figura S.II.1 (i este bisectoarea

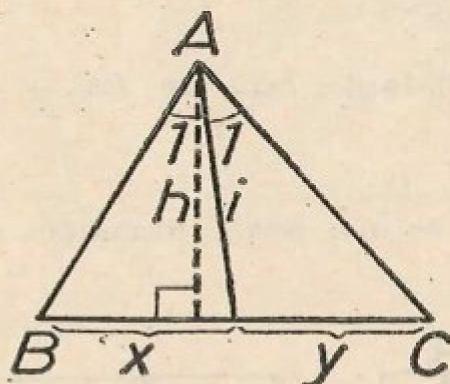


Fig. S.II.1

lui A) exprimăm în două moduri raportul ariilor:

$\frac{S_{AB_1}}{S_{AC_1}} = \frac{xh}{yh} = \frac{bi \cdot \sin \frac{A}{2}}{c \cdot \sin \frac{A}{2}}$. Prin simplificare obţinem relaţia cerută de teorema bisectoarei.

11. $\frac{FB}{FC} = \frac{S_{AFB}}{S_{AFC}} = \frac{AB \cdot AF \cdot \sin x}{AC \cdot AF \cdot \sin y} = \frac{AB^2}{AC^2} \cdot \frac{AC \cdot AD \cdot \sin x}{AB \cdot AD \cdot \sin y} = \frac{AB^2\, S_{ACD}}{AC^2\, S_{ABD}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.

12. Reciproca teoremei lui Ceva, folosind 11. 13. Suma distanţelor este $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, cît înălţimea triunghiului echilateral (a este latura lui). 14. (Figura S.II.2)

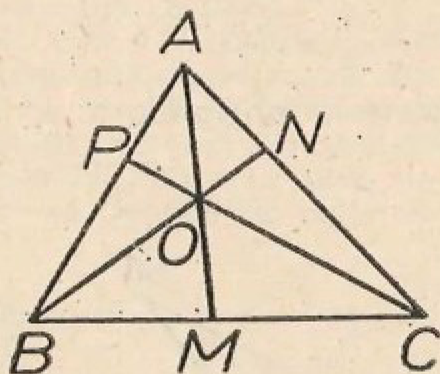


Fig. S.II.2

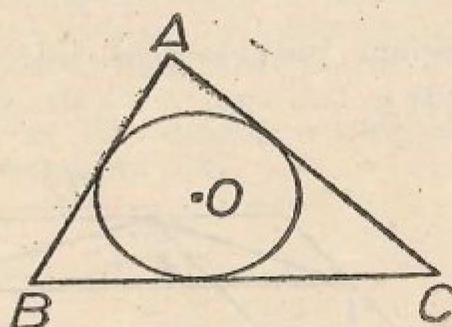


Fig. S.II.3

$\frac{S_{AOB}}{S_{BOC}} = \frac{S_{ABM}}{S_{ACM}}$ ($\triangle AOB$, $\triangle ABM$ au aceeaşi înălţime ce pleacă din B_1 etc.). Apoi $\frac{S_{AMB}}{S_{AOM}} = \frac{MB}{MC}$ (au aceeaşi înălţime ce pleacă din A). Înmulţim cele trei relaţii de tipul $\frac{S_{ABM}}{S_{BOC}} = \frac{MB}{MO}$ între ele.

15. Fie ABC, $A'B'C'$ şi D, D' picioarele înălţimilor din A, A'. Avem $\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$, deci $\frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$ şi $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{BC \cdot AD}{B'C' \cdot A'D'} = \left(\frac{BC}{B'C'}\right)^2$.

16. (Figura S.II.2) $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = \frac{1}{2}\ AB \cdot R + \frac{1}{2}\ BC \cdot$ $\cdot R + \frac{1}{2} CA \cdot R = \frac{1}{2}(AB + BC + CA)R$ etc.

17. $\frac{S_{ABN}}{S_{AMN}} = \frac{AB}{AM}$, $\frac{S_{ABC}}{S_{ABN}} = \frac{AC}{AN}$, teorema lui Thales etc.

18. Evident: $\frac{1}{2}\,ah = \frac{1}{2}\,ah$.

19. Două paralele echidistante față de BC.

II. pag. 66

1. $\sqrt{5}$ cm 2. $\frac{1}{2}\ d_1d_2$. Sau se mai poate considera că este „inscriptibil" într-un dreptunghi (fig. S.II.4)

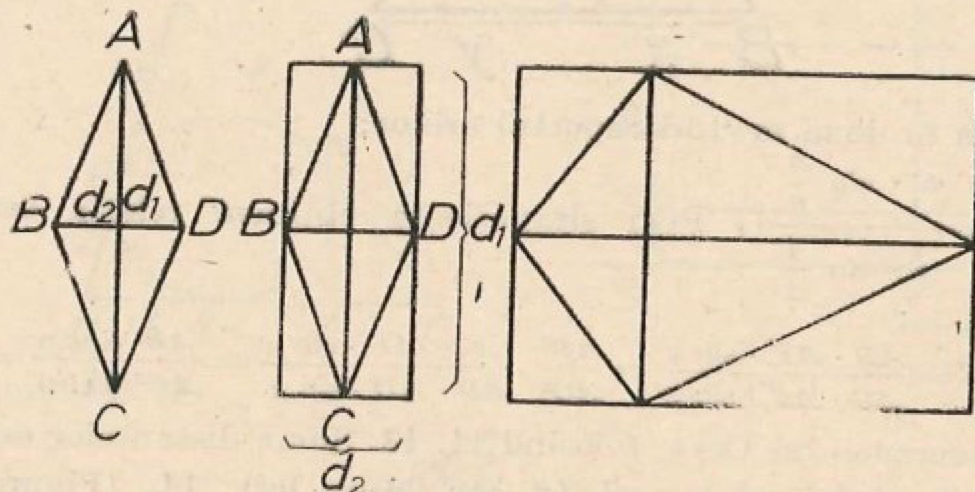
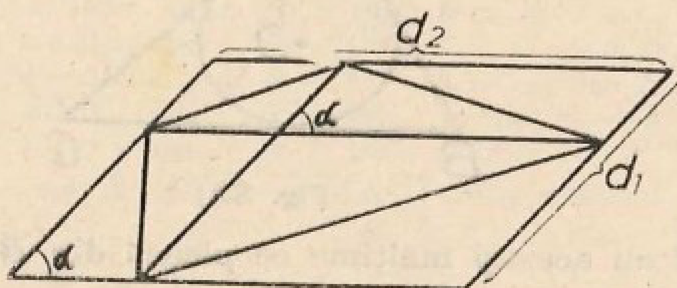


Fig. S.II.4

3. Procedeu identic cu cel de la romb: $S = \frac{1}{2}\ d_1d_2$.

4. Înscriem patrulaterul într-un paralelogram și obținem $S = \frac{1}{2}\ d_1d_2\sin\alpha$ (fig. S.II.5)



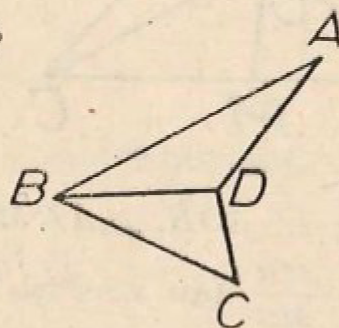
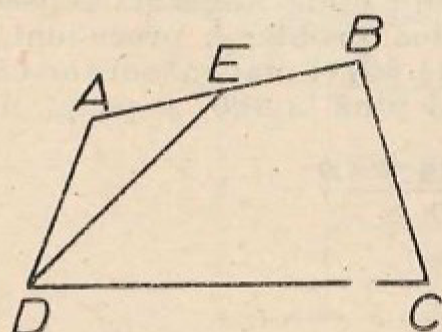


Fig. S.II.5

5. $S = S_{BAC} + S_{DAC}$. Una din descompuneri este cea din S.II.5. Ducem prin A și C paralele la BD și notăm cu H distanța dintre ele $S =$ $= \frac{1}{2}\ BC \cdot h$. **b)** Alte două descompuneri le obținem fie prelungind AD pînă

taie CB în M, fie prelungind AD pînă taie CB în N. Scriem: $S_{ABM} + S_{MDC} = S_{ABD} + S_{BMD} + S_{DMC} = S_{ABD} + S_{BDC}$.

7. Cu notațiile din figura S.II.6 putem descompune patrulaterul $EBCD$ ducind diagonala BD. Deci:



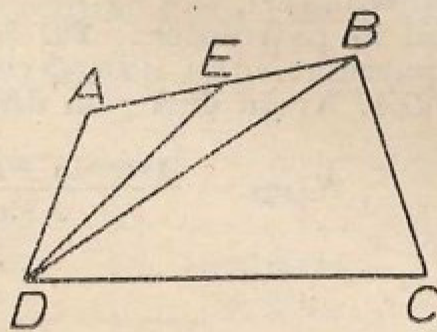


Fig. S.II.6

$S_{EBDC} + S_{AED} = S_{BDC} + (S_{EBD} + S_{AED}) = S_{BDC} + S_{ABD}$ q.e.d.

8. Cu notațiile din figura S.II.7

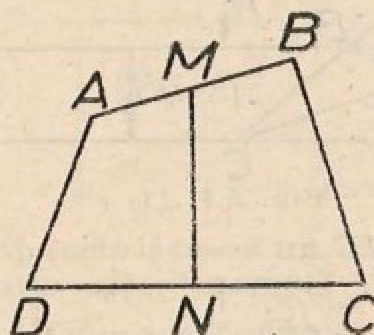


Fig. S.II.7

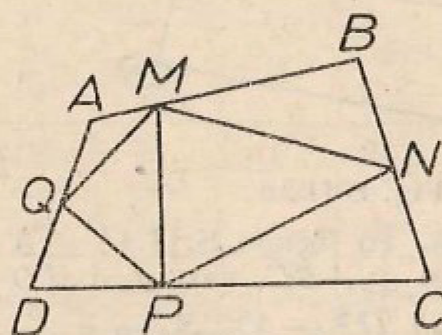
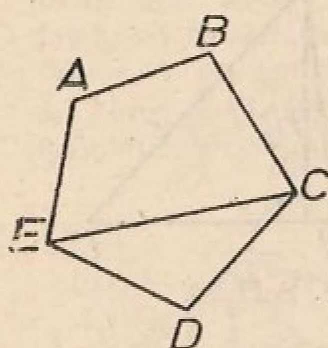


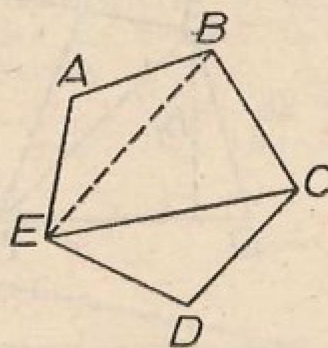
Fig. S.II.8

$S_{AMND} + S_{BMNC} = S_{AMND} + S_{MNC} + S_{MCB} = S_{AMCD} + S_{MCB} = S_{ABCD}$

9. Ducem o diagonală a lui $MNPQ$ de pildă MP și se ajunge la problema precedentă (fig. S.II.8).

10. Lemă: Fie $ABCDE$ un pentagon convex (fig. S. II.9). Atunci oricum am duce o diagonală, „descompunem" pentagonul într-un triunghi și un patrulater a căror sumă de arii este constantă. Această constantă se va numi aria pentagonului convex. Cu notațiile din figură, după ce am dus o diagonală, de exemplu EC, să cercetăm $S_{EDC} + S_{ABCD}$. a) Mai ducem o diagonală dintr-una din extremitățile celei deja duse, de exemplu EB.





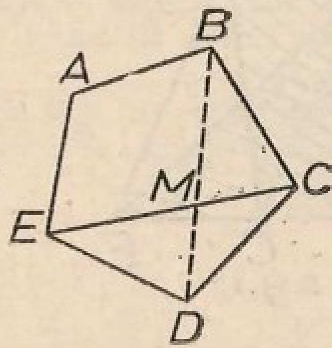


Fig. S.II.9

Avem $S_{EDC} + S_{ABCD} = S_{EDC} + S_{ECB} + S_{EBA} = S_{EDCB} + S_{ABE}$. În acest caz lema este demonstrată. b) Dacă ducem o diagonală care nu are ca extremități pe E sau C, de exemplu BD, avem:
$S_{ABCE} + S_{CED} = S_{ABME} + S_{BMC} + S_{MCD} + S_{MDE} = S_{ABDE} + S_{BDC}$ q.e.d.

11. Nu putem determina aria; contraexemplu; un dreptunghi cu ungimea a și lățimea b are aria ab. Un paralelogram cu o latură a și alta b, dar cu un unghi între ele α, $\alpha \neq 90°$, are ca arie $a \cdot b \cdot \sin \alpha < a \cdot b$. **12.** Dacă se cunosc toate laturile: trebuie duse dintr-un vîrf sau două diagonale la pentagon (respectiv una la patrulater), sau să fie cunoscute două unghiuri consecutive la pentagon și unul la patrulater... **13.** Se aplică problema precedentă.
14. Calculăm aria patrulaterului $ABCD$ (fig. S.II.10) și mai măsurăm unghiurile $\sphericalangle FAD$, $\sphericalangle FDA$. Avem deci prin diferență pînă la 180° și pe $\sphericalangle AFD$ și de aici:

$$S_{AFD} = \frac{AD^2 \sin FDA \cdot \sin FAD}{2 \sin AFD}$$

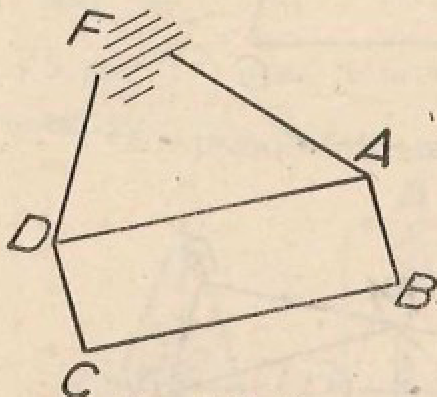


Fig. S.II.10

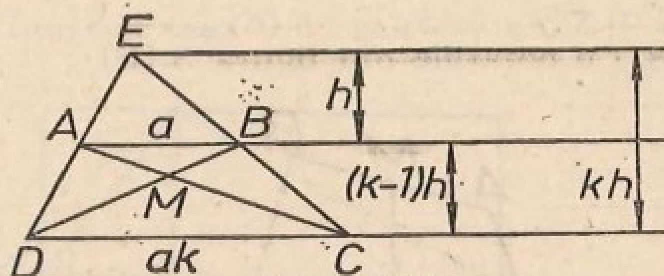


Fig. S.II.11

15. 1/5. **15.** În figura S.II.11 $\triangle EBD$ și $\triangle EAC$ au aceeași arie, de asemenea și $\triangle ABD$ și $\triangle ABC$, sau $\triangle AMD$ și $\triangle BMC$. Demonstrația este imediată $S_{trap} = \frac{1}{2} ah\ (k^2 - 1)$, $S_{AEB} = \frac{1}{2}\ ah$, $S_{EAC} = \frac{1}{2}\ akh$, $S_{ABC} = ah(k = 1)$ și rapoartele ultimelor trei arii cu aria trapezului vor fi: $1/(k^2 - 1)$, $k/(k^2 - 1)$, $1/(k + 1)$. Rămîne de exprimat în funcție de a, k, h ariile $\triangle AMB$, $\triangle CMD$ care se obțin din asemănarea lor cunoscînd suma înălțimilor lor.
17. Ducem dintr-un vîrf, de pildă B, paralela BE la diagonala ce nu trece prin el (AC) (fig. S.II.12). $S_{AED} = S_{ABCD}$.
18. Cu notațiile din figura S.II.12 (M mijlocul lui AB, N al lui DC) $S_{AMN} = S_{BMN}$. Dacă și $S_{ADN} = S_{BNC}$ cum rezultă din ipoteză, atunci perpendicularele $h_1 = h_2$ și problema este rezolvată.

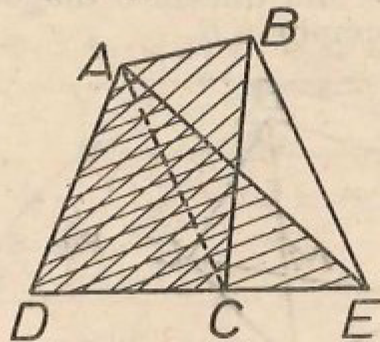


Fig. S.II.12

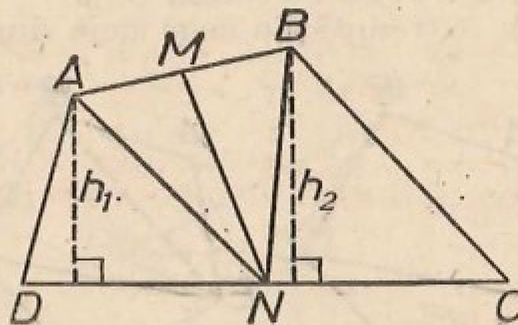


Fig. S.II.13

12 pag. 75

1. $x = \frac{a}{3}$, $x = \frac{a}{\sqrt{2}+1} = a\left(\sqrt{2} - 1\right)$ (am raționalizat numitorul amplificînd fracția cu $\sqrt{2} - 1$) **3.** $a_n = \sqrt{R^2 - \frac{l_n^2}{4}} = \frac{1}{2}\ (\sqrt{4R^2 - l_n^2})$ **4.** $l_8 =$

$= R\sqrt{2-\sqrt{2}}$. **5.** Poligon regulat cu 12 laturi (laturi congruente). **6.** Facem tabelul din care rezultă două tipuri de heptagoane stelate:

n	7	7	7
k	1	2	3
f	7	7/2	7/3
	heptagon convex	heptagon stelat	heptagon stelat

7.

n	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21
k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f	21	$\frac{21}{2}$	7	$\frac{21}{4}$	$\frac{21}{5}$	$\frac{7}{2}$	3	$\frac{21}{8}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{21}{10}$	$\frac{21}{11}$
	$21L$ cvx	$21L$ stelat	$7L$ cvx	$21L$ stelat	$21L$ stelat	$7L$ stelat	$3L$ cvx	$21L$ stelat	$7L$ stelat	$21L$ stelat	$21L$ stelat

8. 159°. **9.** NU! contraexemplu: rombul diferit de pătrat. **10.** NU! Contraexemplu: dreptunghiul. Se ajunge la întrebarea firească: oare pentru orice $n \geqslant 4$ se poate construi un contraexemplu? Încercaţi! Pentru a doua întrebare puteţi duce o paralelă... **11.** N-are importanţă dacă octogonul este regulat sau nu. **12....** Triunghiurile fiind congruente avînd laturile respectiv congruente, sînt congruente şi înălţimile...

13 pag. 82

1. $\frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}$

2. $R^2\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

3. Se află aria „întregii" figuri, adică se adună aria triunghiului cu aria semicercurilor desenate pe catete. Din această sumă se scade aria semicercului desenat pe ipotenuză.

4. Unghiurile de lîngă latura de 15 sînt ascuţite (fig. S.II.15). Aria căutată este suma ariilor celor două sectoare din care se scade dublul ariei triunghiu-

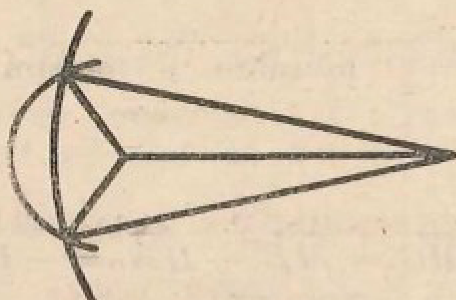


Fig. S.II.14

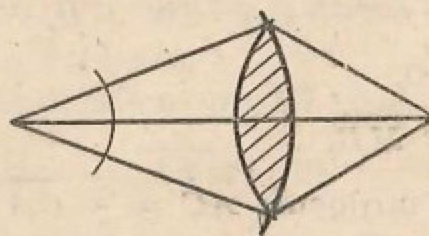


Fig. S.II.15

lui. Vezi problema rezolvată 3, în legătură cu determinarea elementelor necesare

5. Figura S.II.14 și aria căutată este aria sectorului din cercul mic plus dublul ariei triunghiului minus aria sectorului din cercul mare. **6.** Aria trapezului minus suma ariilor celor 2 sectoare. (fig. S.II.16).

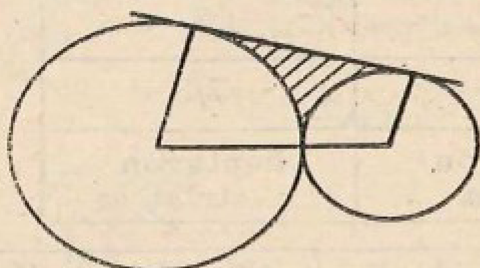


Fig. S.II.16

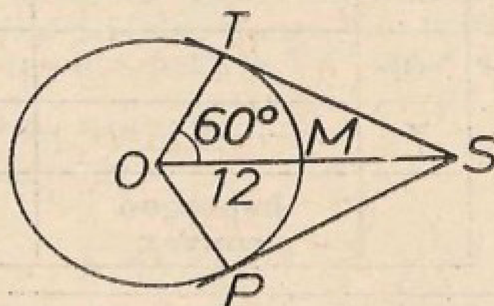


Fig. S.II.17

7. $S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

8. În figura S.II.17 $\sphericalangle O = 60°$, $TS = SP = 6\sqrt{3}$, arc $TMP = 48\pi$. Conturul are $48\pi + 12\sqrt{3}$.

9. Fig. S.II.18

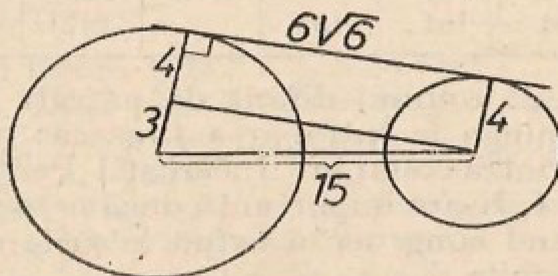


Fig. S.II.18

10. $L\cap = \pi R$; $S\cap = \frac{\pi R}{2}$.

11. Din aria unui triunghi echilateral de latură 4 scădem aria unui semicerc de rază 2; obținem $S = 2(2\sqrt{3} - \pi)$.

12. $36 - 9\pi$ (procedăm asemănător cu 11).

CAPITOLUL III

14. Pag. 86

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$, $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = 0$ adunăm și folosim $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} = 0$.

2. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

3. Fie M mijlocul; $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{DM} = -\overrightarrow{BD}$.

4. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = 0$ deci $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}$ etc.

5. Avem (probl. 2) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{BO'} = \overrightarrow{O'C}$. Deci $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BO'} + \overrightarrow{O'C} = 2\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{BO'} = 2\overrightarrow{OO'}$

6. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CD}$
Înlocuim și obținem, după desfacerea parantezelor, O în stînga.

7. Aplic de ex. 6: $\overrightarrow{MA}\ \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{MN}\ \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}\ \overrightarrow{BM} = 0$

Înlocuiesc $\overrightarrow{AN}$ cu $-\overrightarrow{NA}$ și, ca urmare a proporției deduc

$$\overrightarrow{MN}\ \overrightarrow{BA} = 0 \text{ etc.}$$

15 pag. 89

1. Dacă unul este alungit așa este și celălalt. Dacă fie M punctul de întîlnire a lui $O'y'$ cu Ox de exemplu $\sphericalangle x'O'y'$ și $\sphericalangle xMy'$ rezultă corespondente (sau identice) analog $\sphericalangle xMy'$ și $\sphericalangle xOy$.
2. Unul din ele și opusul la vîrf al celuilalt satisfac ipoteza problemei 1.
3. Unul din ele și cel obținut din celălalt înlocuind una din laturi cu „prelungirea" ei sînt în ipoteza problemei 1.
4. Fie M, N punctele în care paralela taie AB, AC (fig. S.III. 1).

Vom avea $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{AC}} = \dfrac{\overrightarrow{MN}}{\overrightarrow{BC}}$

5.

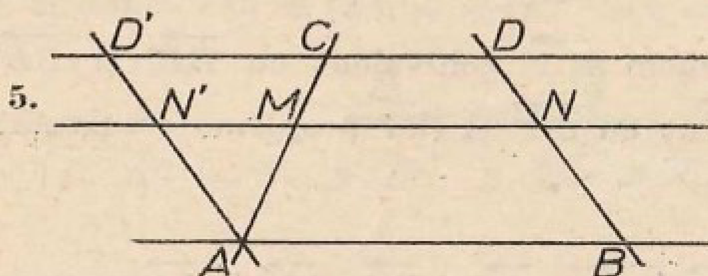


Fig. S.III.2

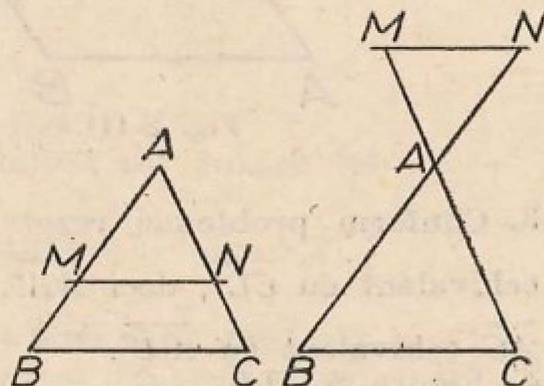


Fig. S.III.1

$AD' \parallel BD$ $\quad y = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN'} + \overrightarrow{N'N}$; $\dfrac{\overrightarrow{MN'}}{\overrightarrow{CD'}} = \dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{AC}}$ (probl. 4); $\overrightarrow{N'N} = \overrightarrow{AB}$;

$\overrightarrow{CD'} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB}$ se înlocuiesc una cu alta și rezultă (evident, în expresie apar și $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$ drept constante).
6. Fie D mijlocul lui AB, D' piciorul perpendicularei din D pe d.

Avem, făcînd $x = \dfrac{\overrightarrow{AC}}{2}$ în problema 5: $\overrightarrow{DD'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'})$ iar făcînd

$x = \dfrac{\overrightarrow{AC}}{3}$ în problema 5: $\overrightarrow{GG'} = \dfrac{2\overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{CC'}}{3}$, înlocuim etc.

16. pag. 91-92

1. *a*, *b* şi nu *c* (fig. S.III.3)

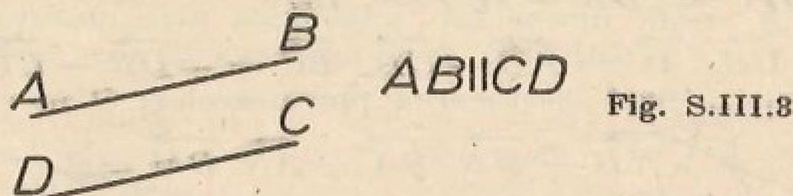


Fig. S.III.3

a, *c* şi nu *b* (fig. S III.4)

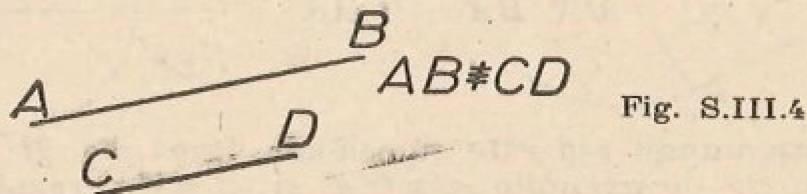


Fig. S.III.4

b, *c* şi nu *a* absurd

2. Luăm $\overrightarrow{CD}$ echivalent cu $\overrightarrow{BA}$ (fig. S III.5). Este tot una cu a lua $\overrightarrow{AD}$ echivalent cu $\overrightarrow{BC}$.

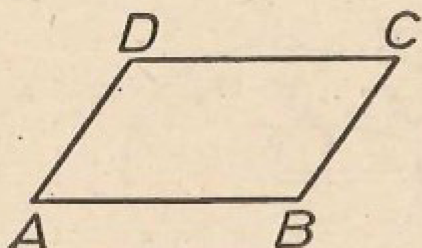


Fig. S.III.5

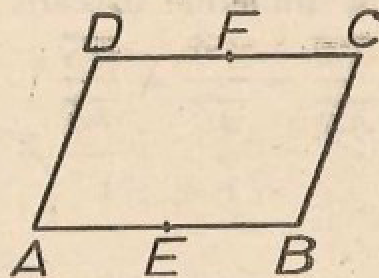


Fig. S.III.6

3. Conform problemei rezolvate obţinem $\overrightarrow{AA'}$ echivalent cu $\overrightarrow{BB'}$ şi $\overrightarrow{BB'}$ echivalent cu $\overrightarrow{CC'}$, deci $\overrightarrow{AA'}$ echivalent cu $\overrightarrow{CC'}$ şi (iar problema rezolvată) $\overrightarrow{AC}$ echivalent cu $\overrightarrow{A'C'}$.

4. Figura S.III.6

$\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{DF}$ şi $\overrightarrow{FC}$; $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EF}$ şi $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AF}$ şi $\overrightarrow{EC}$; $\overrightarrow{BF}$ şi $\overrightarrow{ED}$ precum şi cele obţinute prin „permutarea capetelor în fiecare segment orientat".

5. Figura S.III.7

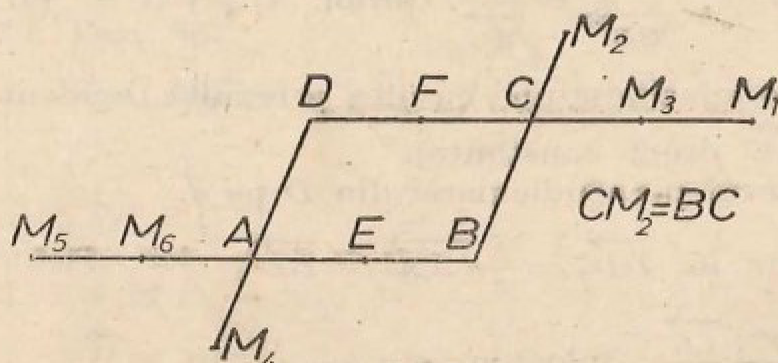


Fig. S.III.7

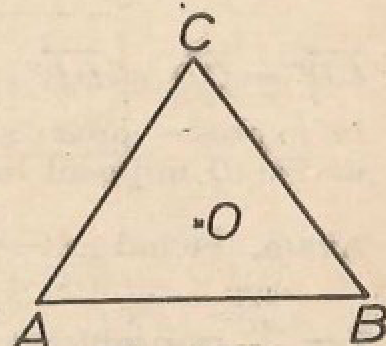


Fig. S.III.8

6 moduri: iau $CM_1 \equiv DC$, $CM_2 \equiv BC$, $CM_3 = \frac{1}{2} CM_1$, $AM_4 \equiv AD$, $AM_5 \equiv$ $\equiv AB$, $AM_6 = \frac{1}{2} AM_5$ şi avem $\overrightarrow{AC}$ echivalent cu $\overrightarrow{BM_1}$, $\overrightarrow{EM_3}$, $\overrightarrow{DM_2}$, $\overrightarrow{M_4B}$, $\overrightarrow{M_5D}$, $\overrightarrow{M_6F}$.

6. $\overrightarrow{OA}$ echivalent cu $\overrightarrow{BD}$ echivalent cu $\overrightarrow{CE}$. D este simetricul lui C faţă de O, iar E al lui B.

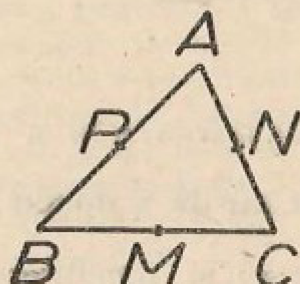


Fig. S.III.9

7. $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{NM}$ şi alte 2 triplete.

17 pag. 96

1.

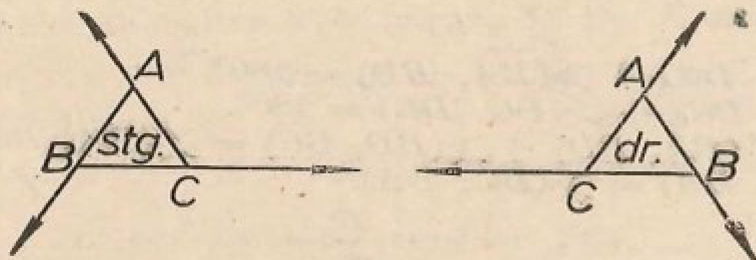


Fig. S.III.10 a

$\measuredangle(AB, AC) + \measuredangle(BC, BA) + \measuredangle(CA, CB) = 180°$.
În al doilea caz se obţine $-180°$ care este considerat tot una cu $180°$.

2.



Fig. S.III.10 b

$\measuredangle(AB, AC) = 0°$, $\measuredangle(BC, BA) = 180°$, $\measuredangle(CA, CB) = 0°$ etc.

3.

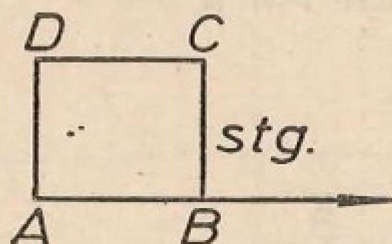


Fig. S.III.11 a

$45°$, $-90°$, $-45°$, $-90°$

4.

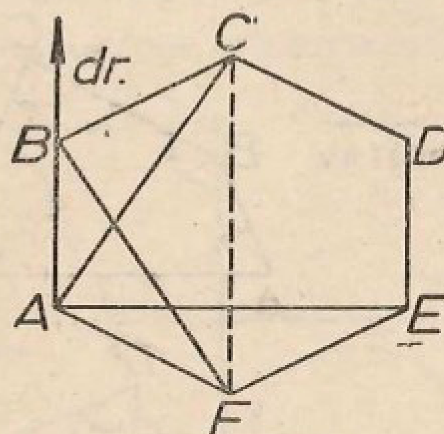


Fig. S.III.11 b

$-120°$, $-90°$, $30°$, $-90°$

5. **Dacă înlocuim** a' **cu** a'' **(fig. S.III.12) obținem:**
$\measuredangle(a'', b') = \measuredangle(a'', a') + \measuredangle(a', b') = 180° + \measuredangle(a', b')$.

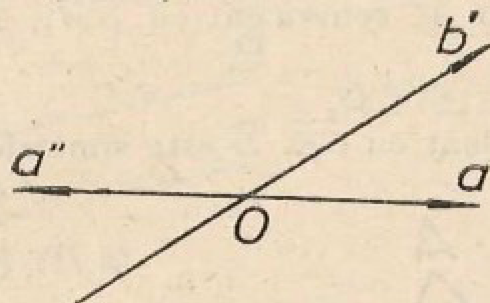


Fig. S.III.12

Deci o astfel de înlocuire duce de la valoarea x la $x + 180°$. O nouă înlocuire va duce la $x + 180° = x$, etc.
Deci două valori x; $x + 180°$. Dublul lui dă valorile $2x$, $2x + 360°$, deci una singură!
6. Geometric două: bisectoarea $\measuredangle(h\ k)$ și „prelungirea" ei. Se poate și prin calcul $\measuredangle(h, k) = \measuredangle(h, b) + \measuredangle(b, k)$ deci $2\measuredangle(h, b) = \measuredangle(h, k)$, dar putem adăuga un multiplu la 360° deci $\measuredangle(h, b) = \frac{1}{2}\measuredangle(h, k) + 180°\ n$. Se obțin 2 valori distincte $\frac{1}{2}\measuredangle(b, h)$ și $\frac{1}{2}\measuredangle(h, b) + 180°$.
7. Vezi problema 1
$\measuredangle(AD, AB) + \measuredangle(DB, DA) + \measuredangle(BA, BD) = 180°$.
$\measuredangle(CB, CD) + \measuredangle(BD, BC) + \measuredangle(DC, DB) = 180°$.
Adun și țin seama de $\measuredangle(BA, BD) + \measuredangle(BD, BC) = \measuredangle(BA, BC)$
$\measuredangle(DC, DB) + \measuredangle(DB, DA) = \measuredangle(DC, DA)$.

Suma este $-360°$

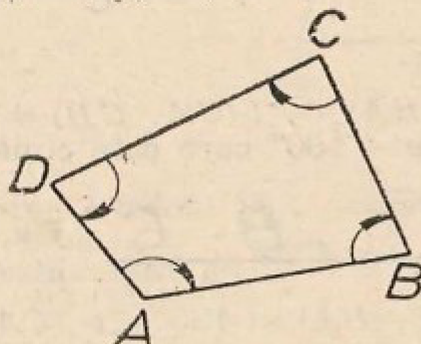


Fig. S.III.13

Suma este $+360°$

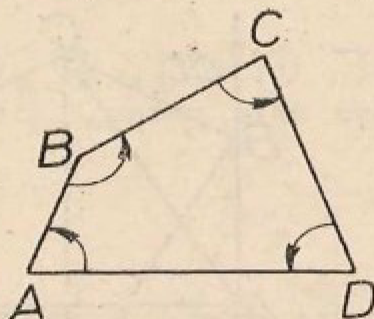


Fig. S.III.14

Suma este 360° (și încă un caz în care este $-360°$)

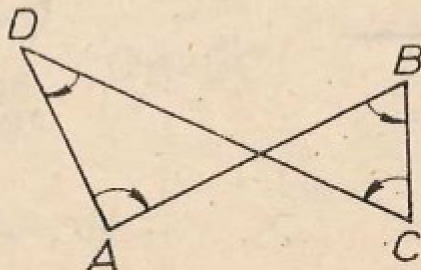


Fig. S.III.15

Suma este 0°

18 pag. 99

1. $\cup(A)\ \cup(B) = AB$ etc.
2. Rezultă, dacă de ex., B este între A şi C, că $\cup(A)\ \cup(C) = \cup(A)\cup(B) + \cup(B)\ \cup(C)$, deci $\cup(A)$, $\cup(B)$, $\cup(C)$ nu pot forma un triunghi.
3. Cazul 3.
4. Vezi raţionamentul de la probl. 2.
5. Cel mai simplu este: în figura imagine diagonalele se taie în părţi congruente. (Considerăm imaginea punctului de intersecţie a diagonalelor patrulaterului iniţial, aplicăm problema 4). O adaptare a raţionamentului de la problema 2 arată că 3 puncte necoliniare merg în 3 puncte necoliniare.
6. Imaginea este paralelogram şi folosim şi problema 3.
7. Problema 2 ne spune că imaginea este formată din puncte coliniare. Fie A, B două puncte pe dreapta iniţială, X un punct pe dreapta $\cup(A)\ \cup(B)$. Dacă semidreptele $\cup(A)X$, $\cup(A)\ \cup(B)$ coincid, fie Y pe semidreapta AB aşa încît $Y = \cup(A)X$; vom avea $\cup(Y) = X$ (probl. 2, 4). În caz contrar aleg Y pe prelungirea semidreptei AB.
8. Cazul 3 de congruenţă.

10 pag. 101

1. Translaţia T, fiind isometrie, duce un cerc dat (de centrul O şi raza R) într-o parte a cercului de centru $T(O)$ şi raza R. Fie X un punct pe acest ultim cerc şi fie Y astfel ca $\overrightarrow{XY}$ echivalent cu $\overrightarrow{T(O)O}$. Rezultă $\overrightarrow{T(O)X}$ echivalent cu $\overrightarrow{OY}$ (problema rezolvată pag 91. deci OY are lungimea R, Y este pe primul cerc, iar $T(Y) = X$ deoarece $\overrightarrow{YX}$ rezultă echivalent cu $\overrightarrow{OT(O)}$ deci cu vectorul translaţiei T.
2. Dacă O şi O' sînt centrele, consider $T_{\overrightarrow{OO'}}$.
3. $\overrightarrow{AT(A)}$ este echivalent cu $\overrightarrow{BT(B)}$ deci $\overrightarrow{T(A)\ T(B)}$ este echivalent cu $\overrightarrow{AB}$ (problema rezolvată pag 91. deci s-a văzut (probl. 7, set 18 pag. 99) că o isometrie duce o dreaptă AB în dreapta $T(A)\ T(B)$ etc.
4. Fie AB o dreaptă. Pentru a fi transformată în ea însăşi de T_v (ştim că este dusă în una paralelă cu ea sau în ea însăşi) trebuie ca punctul $C = T_v(A)$, definit de „$\overrightarrow{AC}$ echivalent cu v" să se afle pe AB, etc. 5. Fie AB segmentul dat. MN congruent şi paralel cu AB este tot una cu $\overrightarrow{MN}$ este echivalent cu $\overrightarrow{AB}$ sau cu $\overrightarrow{BA}$, deci cu: N este fie transformat din M prin translaţia $T_{\overrightarrow{AB}}$,

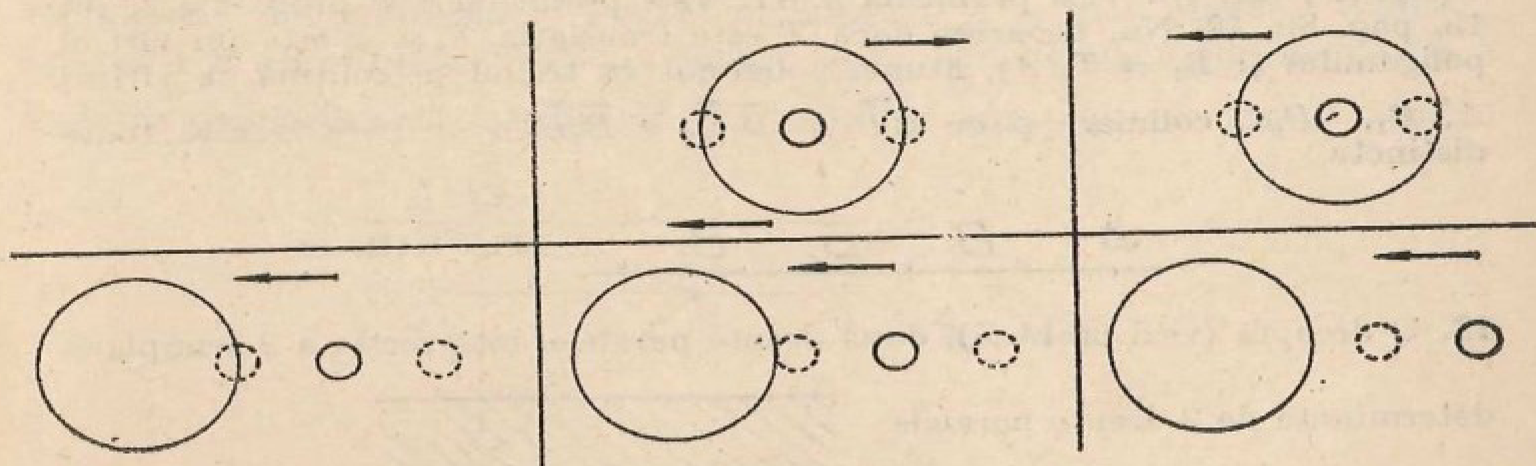


Fig. S.III.16

fie prin $T_{\overrightarrow{BA}}$. Deci se alege N la una din intersecțiile cercului al doilea cu transformatele primului cerc prin cele două translații. Pot fi 0, 1, 2, 3, 4 soluții
6. La fel 0, 1, 2, 3, sau 4 soluții.
7. Le-am notat M' etc.

$$CN' \equiv CP' \equiv CN.$$

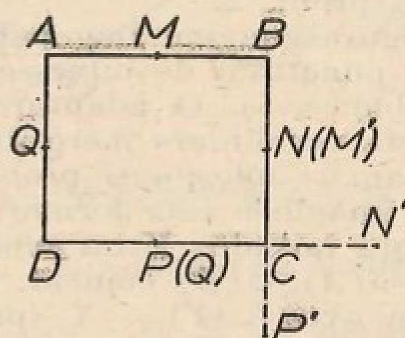


Fig. S.III.17

8. $DD' \equiv OD$, $T_{\overrightarrow{BO}} = T_{\overrightarrow{EO}}$ deci soluție asemănătoare cu primul caz.

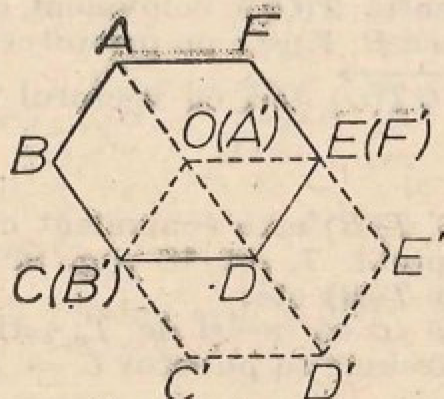


Fig. S.III.18 a

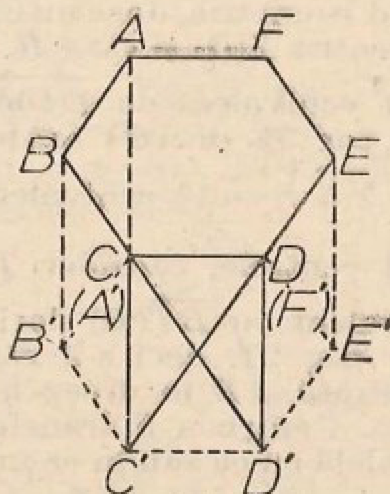


Fig. S.III.18 b

$BB' \parallel \overset{T_{\overrightarrow{AC}}}{EI} \parallel IC$

9. S-a văzut că din $\overrightarrow{AT(A)}$ echivalent cu $\overrightarrow{BT(B)}$ rezultă $\overrightarrow{AB}$ echivalent cu $\overrightarrow{T(A)T(B)}$ etc. **10.** Vezi problema 9. **11.** Vezi problema 8 și problema 2, set 15, pag. 89. **12.** Nu, deoarece dacă T este translația T_v și A este un vîrf al poligonului și $B_1 = T_v(A)$, atunci poligonul va trebui să conțină ca vîrfuri A, B_1, B_2... coliniare și cu $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{B_2B_3} = \ldots$ care rezultă toate distincte



Fig. S.III. 19

13. O dreaptă (vezi probl. 4), două drepte paralele, intersecția a 2 semiplane determinate de 2 drepte paralele.



14. Fie T acea transformare, A un punct fix, X unul variabil. $B = T(A)$. Dacă $Y = T(X)$ atunci $\overrightarrow{AX}$ echivalent cu $\overrightarrow{BY}$ deci (problema rezolvată la pag. 91 $\overrightarrow{XY}$ echivalent cu $\overrightarrow{AB}$, adică $Y = T_{\overrightarrow{AB}}(X)$.

20 pag. 103

1. Rotație aplicată centrului O îl duce în O' ($O' = R_{c,u}(O)$). Fie $M' = R_{c,u}(M)$. Rotația fiind o isometrie, $O'M' \equiv OM$ dar O' este fix deci M' descrie un cerc de aceeași rază cu a primului. Dacă punctele $C = O$ (coincide C cu O) atunci cercul se va transforma în el însuși. **2.** Centrul C al rotației se va găsi pe mediatoarea lui OO' (linia centrelor) și unghiul $\sphericalangle OCO'$ poate fi construit cît vrem de mare.

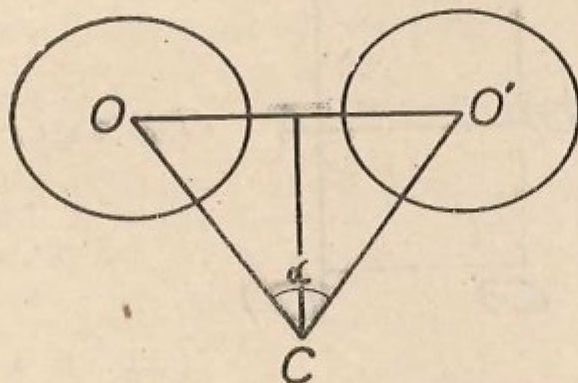


Fig. S.III.21

3. Rotația este o isometrie considerăm $M' = R_{c,u}(M)$, $N' = R_{c,u}(N)$ și $P' = R_{c,u}(P)$ imaginile prin rotație a punctelor coliniare M, N, P. (N între M și P). Dacă M', N', P' nu sînt coliniare rezultă $M'N' + N'P' > M'P'$. Dar $MN + NP = MP$ dar $M'N' \equiv MN$, $N'P' \equiv NP$, $MP \equiv M'P'$, contradicție!

4. Pe semidreapta OX luăm punctele A și B (A între O și B). Deci $OA + AB = OB$. Ele au imaginile respectiv A', B' iar O' îi corespunde lui O. Dacă A' și B' nu se găsesc de aceeași parte a lui O' rezultă că $A'B' + O'A' > O'B'$ dar $A'B' \equiv AB$, $O'A' \equiv OA$, $O'B' \equiv OB$. De aici contradicția. **5.** Considerăm problema rezolvată în cazul în care $d \parallel d'$. Dacă rotim A cu 60° în jurul lui O, ajungem în B. Deci soluția revine la a roti pe d cu 60° în jurul lui O și acolo unde „rotita" lui d taie dreapta d' avem punctul B. O soluție diferită se poate da și prin asemănare considerînd că toate triunghiurile echilaterale sînt asemenea și împărțind latura $O'A'$ a unui „model" echilateral $O'A'B'$ cu punctul C' într-un raport egal cu $\frac{OC}{CA}$. Găsim apoi prin Thales a patra proporțională, segmentul $O'D'$, putem construi apoi pe „model"

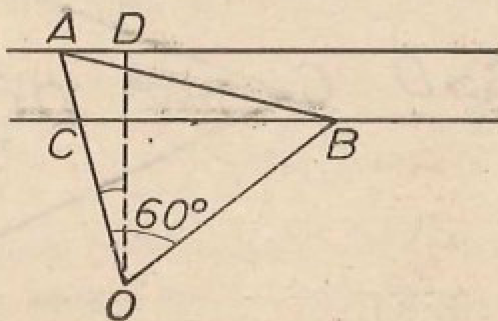


Fig. S.III.22

unghiul $A'O'D'$ și problema este rezolvată. Dacă d și d' nu sînt paralele, procedăm totuși ca în prima soluție.
Avem o infinitate de soluții dacă $d = R_{0,60°}$ (d') adică d' este chiar „rotita" cu 60° a dreptei d).
6. Rotim primul cerc O cu 90° în jurul punctului fix C și intersectăm cu cercul O'. Pot fi 0,1,2,3,4 soluții. **7.** Cele de 120° cu centrul C în centrul cercului circumscris triunghiului echilateral dat. **8, 9.** Soluții asemănătoare cu **7. 10.** Dacă O este „centrul hexagonului" regulat, $R_{0,\pm 120°}$ sînt rotațiile care rezolvă problema în afară de rotația de „argument" 0.

11. Soluțiile sînt pătratele punctate:


Fig. S.III.23

12. Soluțiile sînt hexagoanele punctate:


Fig. S.III.24

13. a) Cu notațiile din figură


Fig. S.III.25

PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Fie G centrul de greutate al triunghiului. Pentru că medianele se intersectează la două treimi de vîrf și o treime de „bază", rezultă $BG = 3$, $GC = 4$ cm. Folosiți reciproca teoremei lui Pitagora, $\sphericalangle BGC = 90°$, și teorema lui Pitagora și $AC = \sqrt{73}$, $AB = \sqrt{13}$.

2. Folosim faptul că tangentele duse dintr-un punct la un cerc sînt congruente, aici $BC \equiv AD = 5$. Apoi, fie prin teorema lui Pitagora aflînd înălțimea, fie prin teorema înălțimii aflînd raza cercului înscris, obținem $r = 2$.

3. a) Triunghiurile au unghiuri congruente.
b) În $\triangle OCA$, $\sphericalangle OAC = \sphericalangle COA = 36°$, deci $CA = OC$. Dar și $\triangle CAB$ este isoscel deci $CA \equiv AB$.

4. Pentru a, b, se folosește problema precedentă; c) Prin asemănarea triunghiurilor ACB și OAB; d) Se efectuează înmulțirea în membrul drept. Din c) și d) rezultă că produsul este 0 cînd unul din factori este 0, deci numai $l = R\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

5. Aplicînd teorema lui Pitagora, se ajunge la ecuația $64 - 16x + x^2 + 16 = x^2$, deci $x = 5$.

6. Din asemănare rezultă că $R_2^2 = R_1R_3$ și de aici obținem relația imediată (În fond, se poate exprima și tg $\widehat{O_3VT'}$ în trei moduri).

7. Patrulaterul $OMPN$ este dreptunghi, deci $MN \equiv OP$.

8. Triunghiul APM este dreptunghi și are un unghi de 50°. Deci $\triangle MPA = 40°$. Punctul P vede segmentul fie sub un unghi de 40° cînd M, N sînt semicercuri diferite determinate de AB, fie de 140° cînd sînt pe același semicerc. Deci P descrie un cerc.

9. a) $OE = OD$ (mediane în triunghiuri dreptunghice cu aceeași ipotenuză). și $\sphericalangle EOD$ este unghi la centru care subîntinde același arc cu unghiul înscris $\sphericalangle EBD = 30°$. (Patrulaterul $BEDC$ este inscriptibil); b) OE este minim cînd BC este minim, deci cînd este perpendicular pe $AB \cdot BC$ în acest caz este $2\sqrt{3}$ și $OE = 3$.

10. Considerăm „jumătate" din dreptunghi determinat de o diagonală. Triunghiul dreptunghic astfel format are înălțimea corespunzătoare ipotenuzei, maximă atunci cînd aceasta este egală cu raza. Deci dreptunghiul căutat este pătratul și aria sa va fi 2.

11. $\dfrac{10}{3}$. **12.** Din asemănarea triunghiului TMA cu $\triangle AMQ$ (fig. S.R.1) și aplicînd puterea punctului M față de cerc, se obține relația cerută.

13. Se compară triunghiurile BDA și BCD. Cercul circumscris $\triangle ABC$ este tangent la dreapta BD. Se folosește puterea punctului.

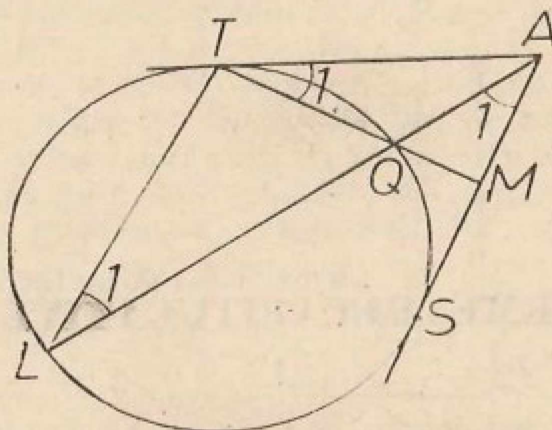


Fig.S.R.1

14. $x = \frac{12}{7}$, $y = \frac{hc}{h+c}$. **15.** Triunghiul $\triangle EAC = \triangle ABG$. De asemenea $\triangle AEH = \triangle AGJ$ etc... **16.** $S = R^2(2\sqrt{2} - 1)$. **17.** $S = 256$. **18.** $x = \frac{a}{8}$. **19.** $S = \frac{a^2}{4}$. **20.** $a \cdot \frac{\sqrt{7\sqrt{3} - 2}}{3}$; $a\frac{\sqrt{7\sqrt{3}-2}}{3}$; $a\frac{\sqrt{21\sqrt{3} - 6}}{3}$; **21.** $x = \frac{6}{5} = 1{,}2$. **22.** $MN = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. **23.** Centrul de simetrie este intersecția celor două axe. Nu, contraexemple: paralelogramul! **24.** Se aplică reciproca teoremei lui Pitagora. Raza căutată este $\frac{R\sqrt{3}}{2}$, unde R este raza cercului inițial. **25.** *1*) Se arată că $\sphericalangle AMN + \sphericalangle MND = 180°$; *2*) Un segment de dreaptă paralel cu AB și de două ori mai mic (se completează, prelungind AC și BD, un paralelogram); *3*) Mediatoarele din enunț sînt și bisectoarele unghiurilor B și A. În fond, chiar mediatoarele din enunț sînt „fixe"; *4*) $CD = \sqrt{3x^2 + a^2 - 3ax}$. **26.** a) Ortocentrul descrie un arc capabil de suplementul unghiului A, deci simetric cu „celălalt" arc. b) Se determină poziția acelui vîrf . Acest vîrf împreună cu un capăt al înălțimii și cu simetricul ortocentrului față de celălalt capăt determină cercul circumscris triunghiului etc. **27.** Consider problema rezolvată, prelungim CC' pînă taie $A'B'$ în C_1, ducem din B paralela BE la CC' ($E \in A'B'$) și constatăm că $A'B'$ este împărțit de E și C_1 în trei părți congruente. Analog, procedăm pe celelalte două laturi $A'C'$ și $C'B'$. **28.** $S = 2(a + b)\sqrt{ab}$. **29.** Se aplică teorema lui Thales de 4 ori, $l = \frac{12}{7}$. **30.** Se aplică teorema bisectoarei și faptul că bisectoarea unghiului A trece prin mijlocul arcului BC. **31.** $TS = \sqrt{6}$. **32.** *a*) $\triangle AOB \sim \triangle AO'C$, unghiurile din D fiind suplimentare, triunghiurile fiind isoscele și subîntinzînd unghiuri la centru de măsuri egale. *b*) D să fie piciorul înălțimii. **33.** $\pi l^2\left(\frac{11}{8} - \sqrt{3}\right) - \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

34. $\pi R^2 - \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$. **35.** $r = \frac{bc}{b + c + \sqrt{b^2 + c^2}}$, $\frac{2}{1}bc - \frac{b^2c^2}{(b + c + (\sqrt{b^2 + l^2})^2}\pi$.

36. Dacă AB n-ar fi paralel cu CD, și dacă s-ar întîlni în partea stîngă a figurii II.59, atunci înălțimea din D $\triangle AMD$ ar fi mai mică decît înălțimea din Q a $\triangle BNQ$ și de asemenea înălțimea din M a $\triangle MDP$ ar fi mai mică decît înălțimea din B a $\triangle BCQ$; deci, ar rezulta aria $AMPD <$ aria $BNQC$. **37.** 8 cm.

 BeatriceGloria_personal library

CUPRINS

